

Lógica Proposicional

CONTENIDO

- Proposiciones Simples
- Conectivos y proposiciones compuestas.
- Tablas de verdad
- Construcción de tablas de verdad para proposiciones compuestas
- Formas derivadas del condicional
- Simbolización

Proposición

- Es un **enunciado** al cual se le puede asociar el concepto de **verdadero** o **falso**, pero **no ambos**.

Ejemplos:

- La luna es cuadrada
- 7 es un número primo
- Las arañas son mamíferos

¿Son proposiciones?

- ¿Qué hora es?
- Por favor, cierre la puerta
- Qué linda mañana!
- $X + 2 = 8$
- No son proposiciones, ya que no poseen valor de verdad

Proposición

- Las proposiciones se denotan por letras minúsculas

- Ejemplo:

p : 2 es un número dígito

q : 8 es par.

Negación

- Si p es una proposición, entonces “no p ” es la negación de p y se denota por:

$$\sim p$$

Ejemplo:

p : Hoy es martes

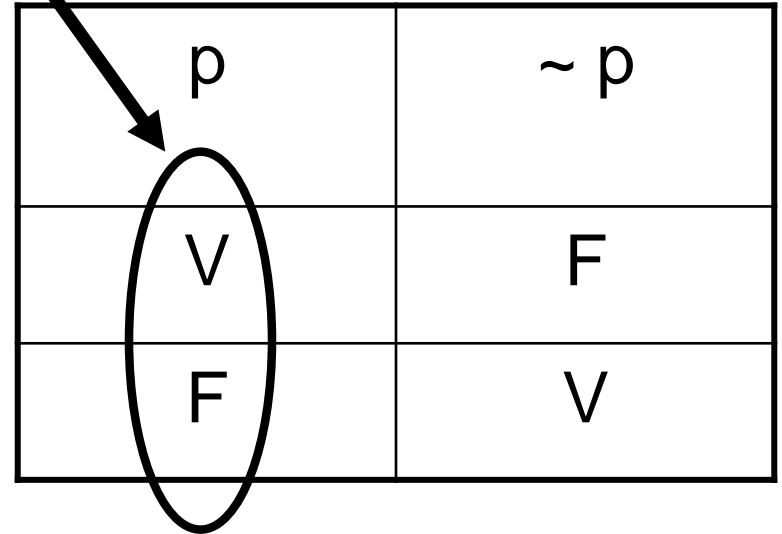
$\sim p$: Hoy no es martes

- ¿Qué sucede con la negación de p , siendo p verdadero?
- ¿Qué sucede con la negación de p , siendo p falso?

Negación

- Esto lo podemos escribir de una manera “compacta”, utilizando una tabla
- A esta tabla se le llama “tabla de certeza de la negación”

Posibilidades para la proposición p



p	$\sim p$
V	F
F	V

Negación

Como sinónimos de *no*, se utilizan las siguientes expresiones:

- *No es cierto que*
- *No es el caso que.....*
- *Es falso que.....*
- *No sucede que.....*

Proposiciones compuestas Conectivos

- Conocido el valor de verdad de ciertas proposiciones, la lógica establece el valor de verdad de otras relacionadas con éstas.
- A éstas últimas se les conoce como proposiciones compuestas
- La Proposición Compuesta esta formada por dos o más proposiciones simples, unidas estas por conectivos lógicos.

- Conectivos lógicos:
- Y se simboliza: \wedge
- O Se simboliza: \vee
- Si... entonces ... Se simboliza: \rightarrow
- ...sí y sólo si ... se simboliza: \leftrightarrow

Conjunción

- Si p y q son proposiciones, se llama conjunción de p y q a la proposición compuesta “ p y q ” y se denota por:

$$p \wedge q$$

- Ejemplos:

p : Hoy es martes

q : La luna es cuadrada

r : mañana es miércoles

$p \wedge q$: Hoy es martes **y** la luna es cuadrada

$p \wedge r$: Hoy es martes **y** mañana es miércoles

Conjunción

- Para construir la tabla de $p \wedge q$, debemos considerar las diferentes alternativas de valores de verdad para p y para q :

- ¿Cuáles son ?

- Ambas verdaderas
- una V y la otra F
- ambas falsas

	p	q	$p \wedge q$
	V	V	V
	V	F	F
	F	V	F
	F	F	F

Conjunción

Se toman como “sinónimos” de la conjunción:

- Además
- Pero
- Sin embargo
- Aunque
- También
- Aún
- A la vez
- No obstante

Conjunción: $p \wedge q$

- Luís estudia , **además** de trabajar
- Luís estudió **pero** no aprobó
- Luís canta, **sin embargo** no baila
- Luís jugó futbol **aunque** estaba lesionado
- Luís juega futbol , **también** José
- Luís salió, **aún** no llega
- Luís cocina **a la vez** que canta
- Luís viajará **no obstante** esté sin visa
- Luís canta , no baila.

Conjunción: $p \wedge q$

No siempre “y” denota una conjunción

Ejemplo:

- Silvia y Nelly son hermanas

Esta es una proposición (simple), en donde el “y” permite establecer la relación entre los sujetos.

Disyunción

- Si p y q son proposiciones, se llama disyunción de p y q a la proposición compuesta “ p o q ” y se denota por:

$$p \vee q$$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Disyunción

- **Seré cantante o futbolista**
- **p: Seré cantante**
- **q: Seré futbolista**

Simbolización:

$$p \vee q$$

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

- Si p y q son proposiciones, se llama condicional de p y q a la proposición compuesta “si p , entonces q ” y se denota por:

$$p \rightarrow q$$

- Ejemplos:
- Si no llueve (entonces) iremos a la playa
- Si me gano la lotería (entonces) me voy de viaje
- Si no estudio (entonces) no aprobaré Lógica

Condicional

- Veamos la tabla del condicional:

$$p \rightarrow q$$

- Conviene pensar en una “promesa” Si no llueve (entonces) iremos a la playa

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condicional

- El condicional es falso, sólo cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso; es decir, cuando la “promesa” no se cumple.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Condicional

- El condicional es muy importante en matemáticas, porque los Teoremas se expresan en forma condicional.
- Un Teorema será un condicional verdadero con hipótesis verdadera

p	q	$p \rightarrow q$
v	v	v

Condicional

Algunas expresiones del lenguaje que indican la presencia de un condicional $(p \rightarrow q)$, son las siguientes:

- **p** es condición suficiente para **q**
- Si **p**, **q**
- **q** si **p**
- Que **p** supone que **q**
- Cuando **p**, **q**
- **q** es condición necesaria para **p**
- En caso de que **p** entonces **q**
- **q** sólo si **p**

Condicional y Teoremas

- En los Teoremas, al antecedente del condicional (p) se le llama Hipótesis y al consecuente (q) se le llama Tesis o Conclusión
- Los Teoremas requieren de una demostración; es decir, partiendo de una hipótesis verdadera, hay que demostrar que la Conclusión es verdadera.

Bicondicional

- Veamos la tabla del condicional:

$$p \leftrightarrow q$$

- Es verdadera cuando ambas proposiciones simples son verdaderas o son falsas.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Tablas de verdad

- Recordemos que el valor de certeza de una proposición compuesta depende de los valores de certeza de las proposiciones simples que la componen
- Para analizar los valores de certeza de una proposición compuesta, representamos todas las posibilidades de valores de verdad de las proposiciones simples, en un arreglo de tabla

Ejemplo con 2 proposiciones simples

- Construyamos la tabla de verdad para la siguiente proposición : $(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$
- 4 filas de posibilidades

p	q	$\sim q$	$p \wedge q$	$p \rightarrow \sim q$	$(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow \sim q)$
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	V	F
F	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	F

Ejemplo con 3 proposiciones simples

- ¿Cuántas posibilidades tendremos?

8

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Ejemplo con 3 proposiciones simples

Hacer la tabla de verdad para: $(r \vee p) \wedge \sim(q \vee p)$

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

$r \vee p$	$q \vee p$	$\sim(q \vee p)$
V	V	F
V	V	F
V	V	F
V	V	F
V	V	F
F	V	F
V	F	V
F	F	V

$(r \vee p) \wedge \sim(q \vee p)$
F
F
F
F
F
F
V
F

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad
 $(p \wedge q) \vee \sim q$

p	q	$p \wedge q$	$\sim q$	$(p \wedge q) \vee \sim q$
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	F	F
F	F	F	V	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge r)$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\sim p$	$(\sim p \wedge r)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge r)$
V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	F	F

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[\sim p \rightarrow (q \wedge p)] \rightarrow \sim q$$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$q \wedge p$	$[\sim p \rightarrow (q \wedge p)]$	$[\sim p \rightarrow (q \wedge p)] \rightarrow \sim q$
V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[\sim p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$$

p	q	r	$\sim p$	$q \vee r$	$[\sim p \wedge (q \vee r)]$	$p \vee r$	$[(p \vee r) \wedge q]$	$[\sim p \wedge (q \vee r)] \leftrightarrow [(p \vee r) \wedge q]$
V	V	V	F	V	F	V	V	F
V	V	F	F	V	F	V	V	F
V	F	V	F	V	F	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V	F	V
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	F	F	F	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim r$$

p	q	r	$\sim q$	$p \rightarrow \sim q$	$r \rightarrow \sim q$	$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow \sim q)]$	$\sim r$	$[(p \rightarrow \sim q) \wedge (r \rightarrow \sim q)] \rightarrow \sim r$
V	V	V	F	F	F	F	F	V
V	V	F	F	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	V	V	V	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$$

p	q	r	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim q \wedge r$	$[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)]$	$r \rightarrow q$	$[(p \rightarrow q) \vee (\sim q \wedge r)] \leftrightarrow (r \rightarrow q)$
V	V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	V	F	F	V	F
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F
F	F	F	V	V	F	V	V	V

INVESTIGACION DISYUNCION EXCLUSIVA Y DISYUNCION INCLUSIVA DIFERENCIAS

INCLUSIVA

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

EXCLUSIVA

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[\sim(p \rightarrow \sim r) \wedge \sim q] \vee (\sim p \Delta q)$$

p	q	r	$\sim r$	$p \rightarrow \sim r$	$\sim(p \rightarrow \sim r)$	$\sim q$	$[\sim(p \rightarrow \sim r) \wedge \sim q]$	$\sim p$	$(\sim p \Delta q)$	$[\sim(p \rightarrow \sim r) \wedge \sim q] \vee (\sim p \Delta q)$
V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	V
V	V	F	V	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	V	V	V	F	F	V
V	F	F	V	V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	F	V	F	V	V	V

Conectiva	Nombre Lógico	Símbolo
No	Negación	$\neg, \sim, \bar{}$
Y	Conjunción	\wedge
O	Disyunción Inclusiva	\vee
O ... O	Disyunción Exclusiva	$\underline{\vee}$
Si ... entonces	Implicación o Condicional	\rightarrow
Si y solo si	Doble Implicación o Bicondicional	\leftrightarrow

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$p \leftrightarrow \neg\neg p$$

P	$\neg p$	$\neg\neg p$	$p \leftrightarrow \neg\neg p$
V	F	V	V
F	V	F	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$$

p	q	r	$p \vee q$	$[(p \vee q) \vee r]$	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$	$[(p \vee q) \vee r] \leftrightarrow [p \vee (q \vee r)]$
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad
 $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$

The image shows a handwritten truth table on grid paper. At the top, the proposition $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$ is written. Below it, a table is constructed with five columns: p , q , $\neg p$, $(p \wedge \neg p)$, and $(p \wedge \neg p) \rightarrow q$. The table contains four rows of data, showing that the final column is always 'V' (true).

p	q	$\neg p$	$(p \wedge \neg p)$	$(p \wedge \neg p) \rightarrow q$
V	V	F	F	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \wedge q))$$

$$(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow (p \wedge q))$$

p	q	(p ^ q)	(p → (p ^ q))	(p → q)	(p → q) → (p → (p ^ q))
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[(p \wedge q) \vee \neg r] \leftrightarrow p$$

$[(p \wedge q) \vee \neg r] \leftrightarrow p$

p	q	r	$\neg r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee \neg r$	$[(p \wedge q) \vee \neg r] \leftrightarrow p$
V	V	V	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	F	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	F	V	F
F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	F	V	F

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$$

The image shows a handwritten truth table on grid paper. The table is organized into columns for 'Día', 'Mes', and 'Año'. The main proposition is written as $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$. Below this, the components are broken down into columns: $\neg(p \wedge q)$, $\neg p$, $\neg q$, and $(\neg p \vee \neg q)$. Each column contains a list of truth values (V for Verdad, F for Falsedad) corresponding to the combinations of p and q. The final column shows the result of the biconditional operation, which is consistently 'V' for all combinations, indicating the proposition is a tautology.

Día	Mes	Año	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p \vee \neg q)$
V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	V	V	F	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	F	F	F
F	F	F	V	F	V	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$\sim((\sim p \wedge q) \vee q) \vee \sim((s \vee \sim q) \wedge s)$$

$\sim((\sim p \wedge q) \vee q) \vee \sim((s \vee \sim q) \wedge s)$

P	q	s	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$(\sim p \wedge q) \vee q$	$\sim((\sim p \wedge q) \vee q)$	$\sim q$	$s \vee \sim q$	$(s \vee \sim q) \wedge s$	$\sim((s \vee \sim q) \wedge s)$	Resultado
V	V	V	F	F	V	F	F	V	V	F	F
V	V	F	F	F	V	F	F	F	F	V	V
V	F	V	F	F	F	V	V	V	V	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	F	F	F	F	V	V
F	F	V	V	F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	F	F	V	V	F	F	V	V

Design

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad
 $((p \vee r) \wedge q) \vee (p \vee r) \wedge (\sim p \vee r)$

The image shows a handwritten truth table on grid paper. The table is organized into columns for variables p, q, r, and the final logical expression. The expression is written as $((p \vee r) \wedge q) \vee (p \vee r) \wedge (\sim p \vee r)$. The truth values for each row are as follows:

p	q	r	$((p \vee r) \wedge q) \vee (p \vee r) \wedge (\sim p \vee r)$
V	V	V	V
V	V	F	V
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$(q \vee r) \vee (p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim q \wedge p)$$

p	q	r	$q \vee r$	$p \wedge q$	$(q \vee r) \vee (p \wedge q)$	$\sim r$	$\sim q$	$(\sim r \wedge \sim q)$	$(\sim r \wedge \sim q \wedge p)$	$(q \vee r) \vee (p \wedge q) \vee (\sim r \wedge \sim q \wedge p)$
V	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V
V	V	F	V	V	V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	F	F	V	V	V	V	V
F	V	V	V	F	V	F	F	F	F	V
F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V	F	V	F	F	V
F	F	F	F	F	F	V	V	V	F	F

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$\sim((\sim p \wedge q) \rightarrow q) \vee \sim((s \leftrightarrow \sim q) \wedge s)$$

p	q	S	$\sim p$	$\sim p \wedge q$	$\sim p \wedge q \rightarrow q$	$\sim((\sim p \wedge q) \rightarrow q)$	$\sim q$	$((s \leftrightarrow \sim q))$	$((s \leftrightarrow \sim q) \wedge s)$	$\sim((s \leftrightarrow \sim q) \wedge s)$	$\sim((\sim p \wedge q) \rightarrow q) \vee \sim((s \leftrightarrow \sim q) \wedge s)$
V	V	V	F	F	V	F	F	F	F	V	V
V	V	F	F	F	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	F	V	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F	F	V	V
F	V	F	V	V	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	F	F	V	V

Dada la siguiente proposición, elaborar tabla de verdad

$$[\sim(p \Delta r) \wedge q] \Delta (\sim p \leftrightarrow q)$$

p	q	r	$p \Delta r$	$\sim(p \Delta r)$	$[\sim(p \Delta r) \wedge q]$	$\sim p$	$(\sim p \leftrightarrow q)$	$[\sim(p \Delta r) \wedge q] \Delta (\sim p \leftrightarrow q)$
V	V	V	F	V	V	F	F	V
V	V	F	V	F	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V	V
F	V	F	F	V	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F	V	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F

En resumen

- Una tabla de verdad para proposiciones compuestas que contienen:

- 1 proposición simple... tendrá 2 filas

- 2 proposiciones simples \longrightarrow

$$4 = 2^2 \text{ filas}$$

- 3 proposiciones simples \longrightarrow

$$8 = 2^3 \text{ filas}$$

- 4 proposiciones simples \longrightarrow

$$16 = 2^4 \text{ filas}$$

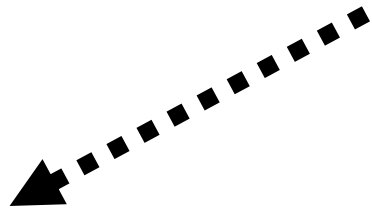
.....razonando inductivamente.....

- n proposiciones simples \longrightarrow

$$2^n \text{ filas}$$

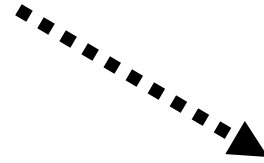
Partes de un condicional

$$p \rightarrow q$$



antecedente

Condición
suficiente



consecuente

Condición
necesaria