ALGEBRA DE BOOLE
Y
SIMPLIFICACION LOGICA

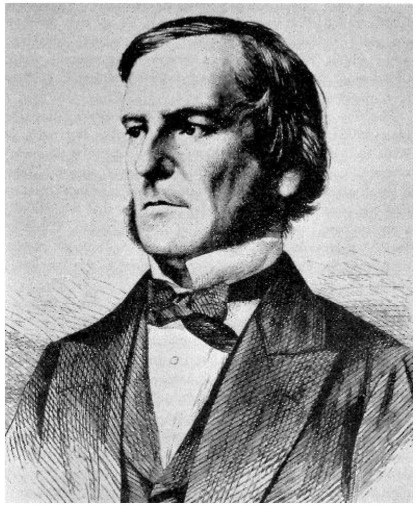
Autor: Víctor Andrés Ochoa Correa

ALGEBRA DE BOOLE

- **Álgebra booleana** en informática y matemática, es una estructura algebraica que esquematiza las operaciones lógicas Y, O , NO y SI (AND, OR, NOT, IF), así como el conjunto de operaciones unión, intersección y complemento. El álgebra de Boole fue un intento de utilizar las técnicas algebraicas para tratar expresiones de la lógica proposicional. El Álgebra de Boole es el algebra de 2 valores. Normalmente tienen el valor “0” y “1”, pero también pueden tener los valores de “falso” y “verdadero”.

ALGEBRA DE BOOLE

- George Boole fue un lógico y matemático británico. Escribió los libros: “The Mathematical Analysis of Logic” (1847) y “An Investigation of the Laws of Thought” (1854). Desarrolló la lógica Simbólica mediante la cual las proposiciones pueden ser representadas mediante símbolos y la teoría que permite trabajar con estos símbolos, sus entradas (variables o proposiciones) y sus salidas (respuestas).



OPERACIONES Y EXPRESIONES BOOLEANAS

- El algebra de Boole son las matemáticas de los sistemas digitales. Es indispensable tener unos conocimientos básicos del álgebra booleana para estudiar y analizar los circuitos lógicos.

- En el tema previo hemos estudiado las operaciones y expresiones booleanas para las puertas NOT, AND, OR, NAND y NOR.

Definiciones

- Los términos *variable*, *complemento* y *literal* son términos utilizados en el álgebra booleana:

  - Una *variable* es un símbolo que se utiliza para representar magnitudes lógicas. Una variable puede tener el valor 0 o 1.
  - El *complemento* es el inverso de una variable y se indica mediante una barra encima de la misma. Así, el complemento de A es $\overline{A}$.
  - Un *literal* es una variable o el complemento de una variable.

Operaciones y Expresiones Booleanas

- **Addition**

$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

OR

- **Multiplication**

$$0 * 0 = 0$$
$$0 * 1 = 0$$
$$1 * 0 = 0$$
$$1 * 1 = 1$$

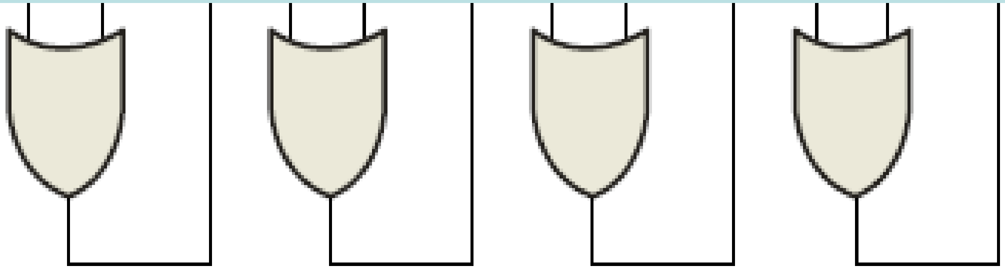
AND

fppt.com

Suma booleana

- Como hemos visto en el tema anterior, la suma booleana es equivalente a la operación OR. El término suma es 1 si al menos uno de sus literales son 1. El término suma es cero solamente si cada literal es 0.

$0+0 = 0 \quad 0+1 = 1 \quad 1+0 = 1 \quad 1+1 = 1$

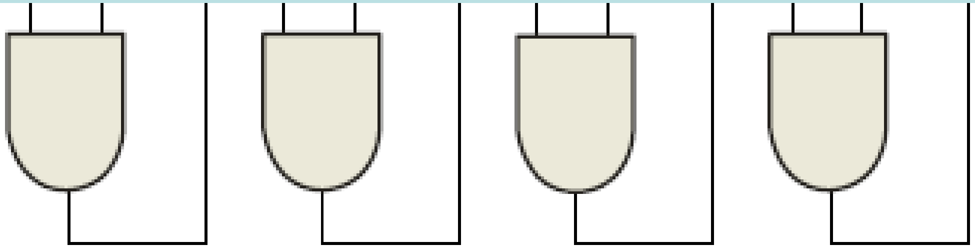


- En el álgebra de Boole, el ***término suma*** es una suma de literales. En los circuitos lógicos, un término suma se obtiene con la operación OR, sin que exista ninguna operación AND. Ejemplos: $A+B$, $A+\overline{B}$, $A+B+\overline{C}$, $A+\overline{B}+C+\overline{D}$.

Multiplicación booleana

- Igualmente, ya hemos visto que la multiplicación booleana es equivalente a la operación AND. El producto de literales forma un término producto. El término producto será 1 solamente si todos literales son 1.

$0 \cdot 0 = 0 \quad 0 \cdot 1 = 0 \quad 1 \cdot 0 = 0 \quad 1 \cdot 1 = 1$



- En el álgebra de Boole, el ***término producto*** es un producto de literales. En los circuitos lógicos, un término producto se obtiene con la operación AND, sin que exista ninguna operación OR. Ejemplos: AB, $A\overline{B}$, ABC, $A\overline{B}C\overline{D}$.

LEYES Y REGLAS DEL ALGEBRA DE BOOLE

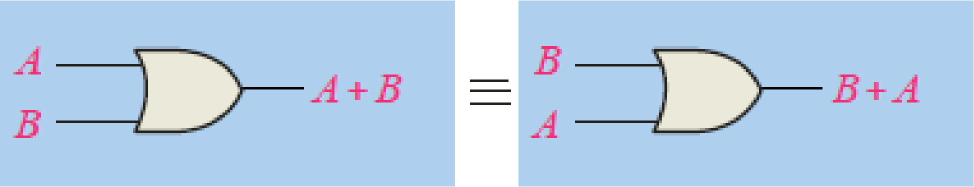
Ley Conmutativa
Ley Asociativa
Ley Distributiva

Leyes conmutativas

- Las leyes conmutativas se aplican a la suma y la multiplicación.

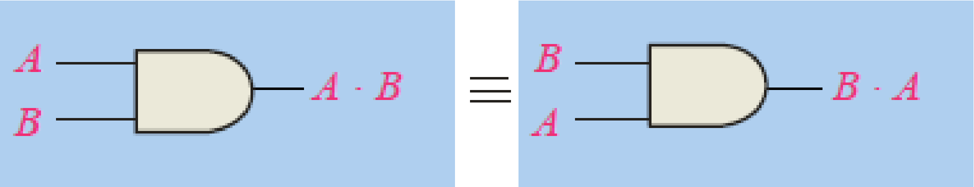
  - Para la suma la ley conmutativa declara: En términos del resultado, el orden en el cual se suman (OR) las variables es indiferente.

$$\boxed{A + B = B + A}$$



  - Para la multiplicación la ley conmutativa declara: En términos del resultado, el orden en el cual se multiplican (AND) las variables es indiferente.

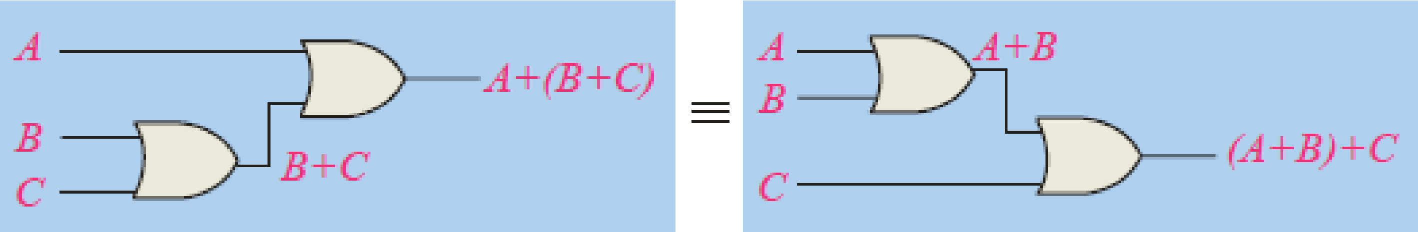
$$\boxed{AB = BA}$$



Leyes asociativas

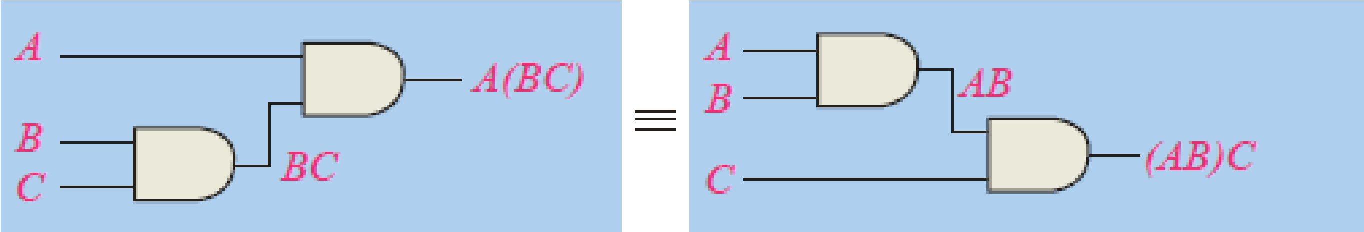
- Las leyes asociativas se aplican también a la suma y la multiplicación.
  - Para la suma la ley asociativa declara: Cuando de suman (OR) más de dos variables, el resultado es el mismo a pesar del agrupamiento de las variables.

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$



  - Para la multiplicación la ley asociativa declara: Cuando se multiplican (AND) más de dos variables, el resultado es el mismo a pesar del agrupamiento.

$$A(BC) = (AB)C$$

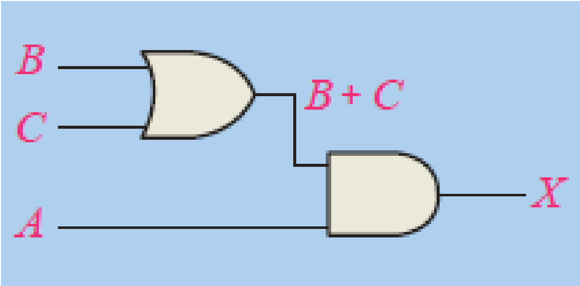


Ley distributiva

- La ley distributiva es la ley de factorización. Una expresión que contiene factores comunes se puede factorizar tal como en el algebra ordinaria.

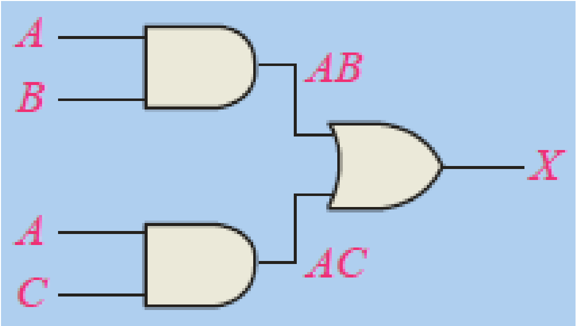
$$\boxed{AB + AC = A(B + C)}$$

- La ley distributiva se puede ilustrar con circuitos equivalentes:



$X = A(B + C)$

$\equiv$



$X = AB + AC$

Reglas del álgebra booleana

- A continuación, se enumeran las doce reglas básicas, muy útiles, para la manipulación y simplificación de expresiones booleanas.

1. $A + 0 = A$
2. $A + 1 = 1$
3. $A \cdot 0 = 0$
4. $A \cdot 1 = \mathrm{A}$
5. $A + A = A$
6. $A + \overline{A} = 1$
7. $A \cdot A = A$
8. $A \cdot \overline{A} = 0$
9. $\overline{\overline{A}} = A$
10. $A + AB = A$
11. $A + \overline{A}B = A + B$
12. $(A + B)(A + C) = A + BC$

TEOREMAS DE DeMORGAN

- DeMorgan propuso dos teoremas que constituyen una parte importante del álgebra de Boole.

- Fundamentalmente, los teoremas de DeMorgan proporcionan una verificación matemática de la equivalencia entre las puertas NAND y negativa-OR, y las puertas NOR y negativa-AND.

- En lo sucesivo aprenderemos:

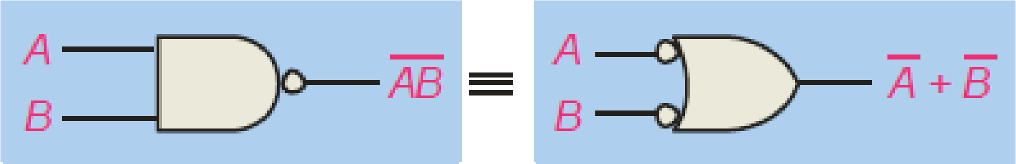
  - Los postulados de los teoremas de DeMorgan.
  - Relacionar los teoremas de DeMorgan con la equivalencia entre puertas NAND y negativa-OR, y puertas NOR y negativa-AND.
  - Aplicar los teoremas de DeMorgan para simplificar las expresiones booleanas.

TEOREMAS DE DeMORGAN

- 1er Teorema de DeMorgan.
  - **Enunciado:** "El complemento de un producto de variables es igual a la suma de las variables complementadas".

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$$

- Aplicando el primer teorema de DeMorgan a las puertas:



NAND Negative-OR

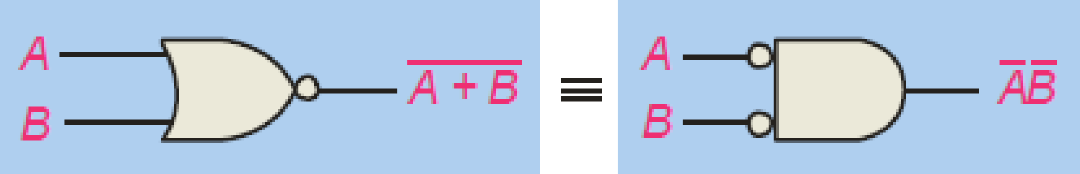
Inputs		Output	
A	B	$\overline{AB}$	$\overline{A} + \overline{B}$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	1	1
1	1	0	0

TEOREMAS DE DeMORGAN

- 2do Teorema de DeMorgan.
  - **Enunciado:** "El complemento de una suma de variables es igual al producto de las variables complementadas".

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

- Aplicando el segundo teorema de DeMorgan a las puertas:



NOR   Negative-AND

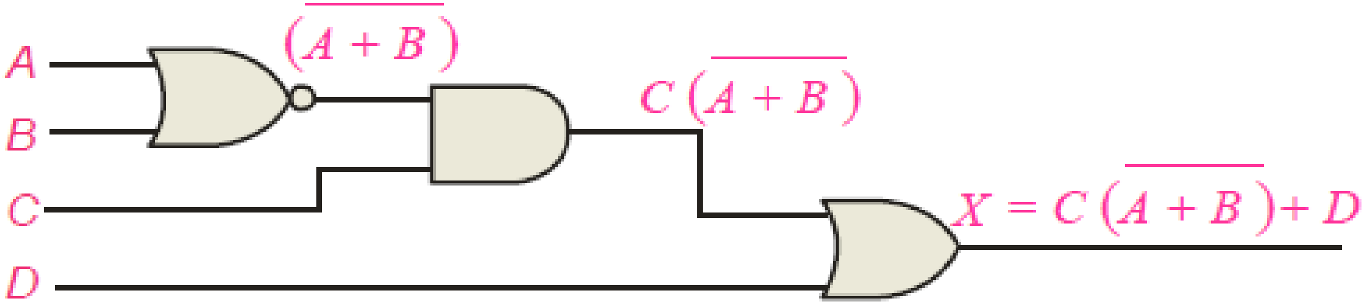
Inputs		Output	
A	B	$\overline{A+B}$	$\overline{A}\overline{B}$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	0	0

ANÁLISIS BOOLEANO DE LOS CIRCUITOS LÓGICOS

- El álgebra de Boole proporciona una manera concisa de expresar el funcionamiento de un circuito lógico formado por una combinación de puertas lógicas, siendo la salida una combinación de los valores de entrada.

Expresión booleana de un circuito lógico

- Los Circuitos Lógicos Combinacionales se pueden analizar escribiendo la expresión para cada puerta lógica y combinando estas expresiones de acuerdo a las reglas del álgebra de Boole. A continuación un ejemplo:



Aplicando el teorema de DeMorgan y la ley de distribución:

$$X = C\,(\overline{A}\ \overline{B}) + D = \overline{A}\,\overline{B}\,C + D$$

Tabla de verdad para un circuito lógico

- Una vez determinada la expresión booleana de un circuito lógico, puede elaborarse una tabla de verdad que represente la salida del circuito lógico para todos los posibles valores de las variables de entrada.

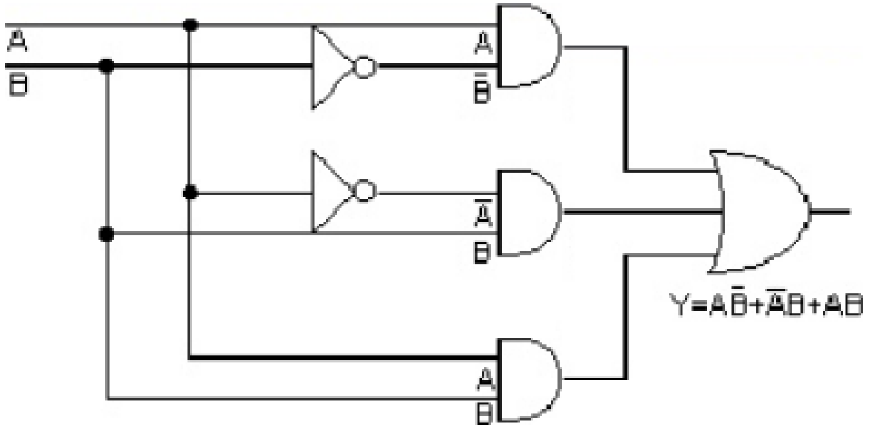
- Para la expresión booleana obtenida en el ejemplo de la diapositiva anterior, se tiene:

$$X = C\,(\overline{A}\ \overline{B}) + D = \overline{A}\,\overline{B}\,C + D$$

Entradas				Salidas
A	B	C	D	$\overline{A}\,\overline{B}\,C + D$
0	0	0	0	0
0	0	0	1	1
0	0	1	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	1	1	1
1	1	0	0	0
1	1	0	1	1
1	1	1	0	0
1	1	1	1	1

EJEMPLO

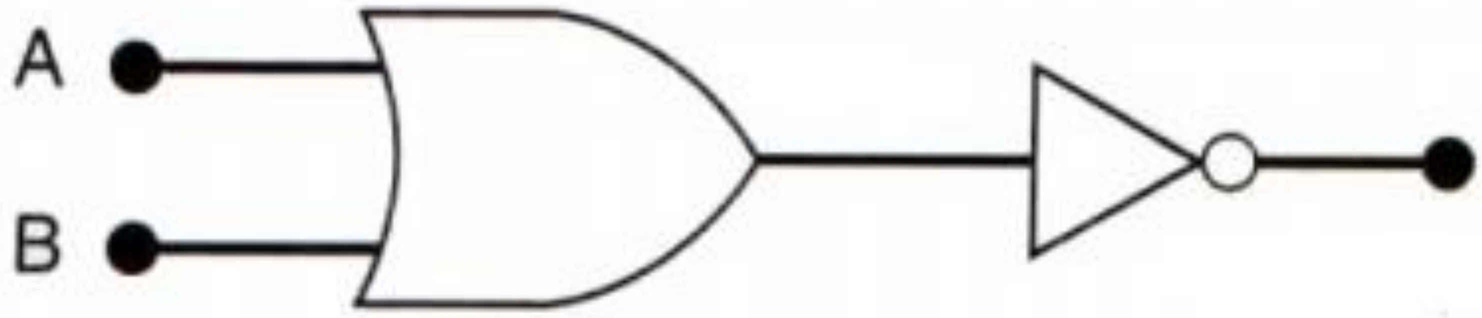
Considerar la expresión booleana Y = A·B' + A'·B + A·B. Un diagrama lógico de ésta expresión aparece en la siguiente figura:



Observar que deben utilizarse seis compuertas para implementar este circuito lógico, que realiza la lógica detallada en la tabla de verdad que se muestra.

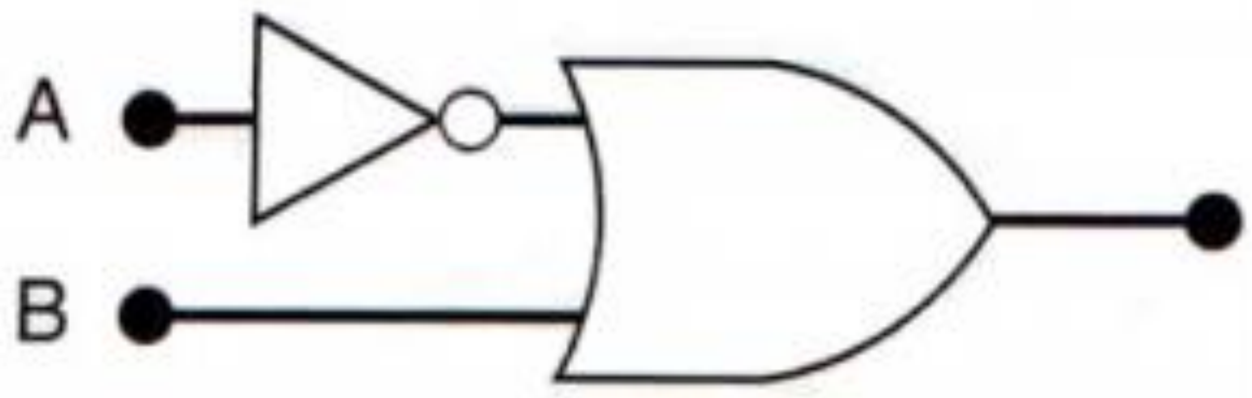
ENTRADAS		PRODUCTOS PARCIALES			SALIDA
B	A	A * B'	A' * B	A * B	Y
0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	1
1	1	0	0	1	1

Tabla 1: Tabla de verdad de la función OR



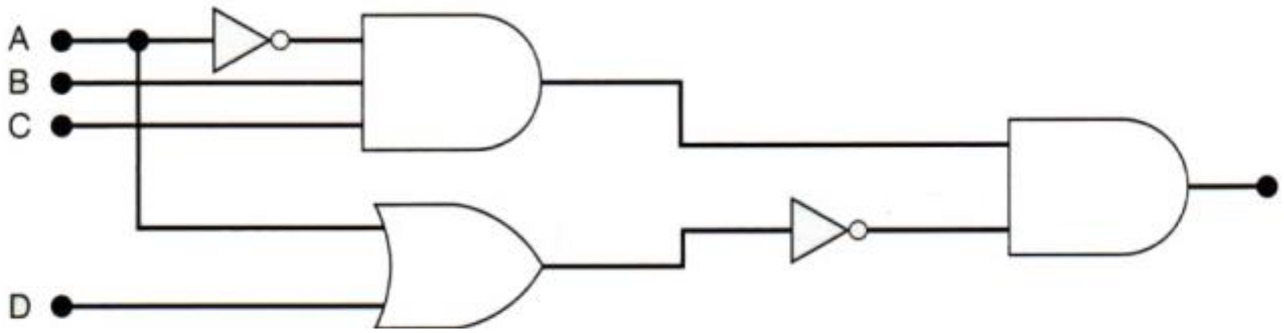
$$0 + 0 = 0$$
$$0 + 1 = 1$$
$$1 + 0 = 1$$
$$1 + 1 = 1$$

A	B	$\overline{A+B}$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

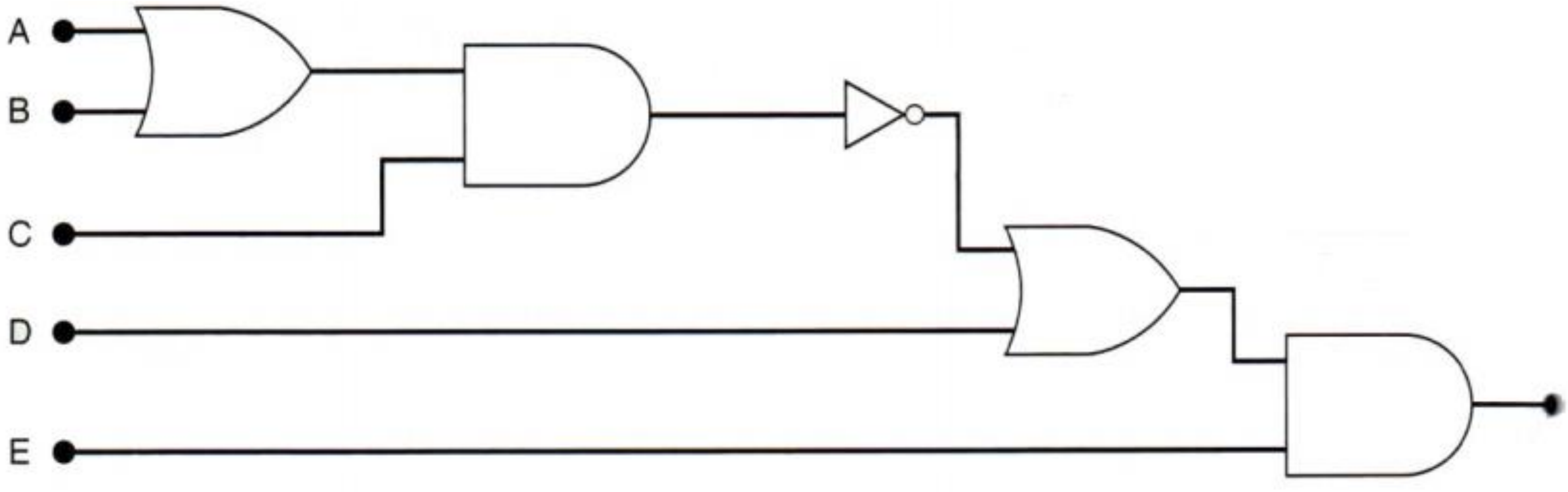


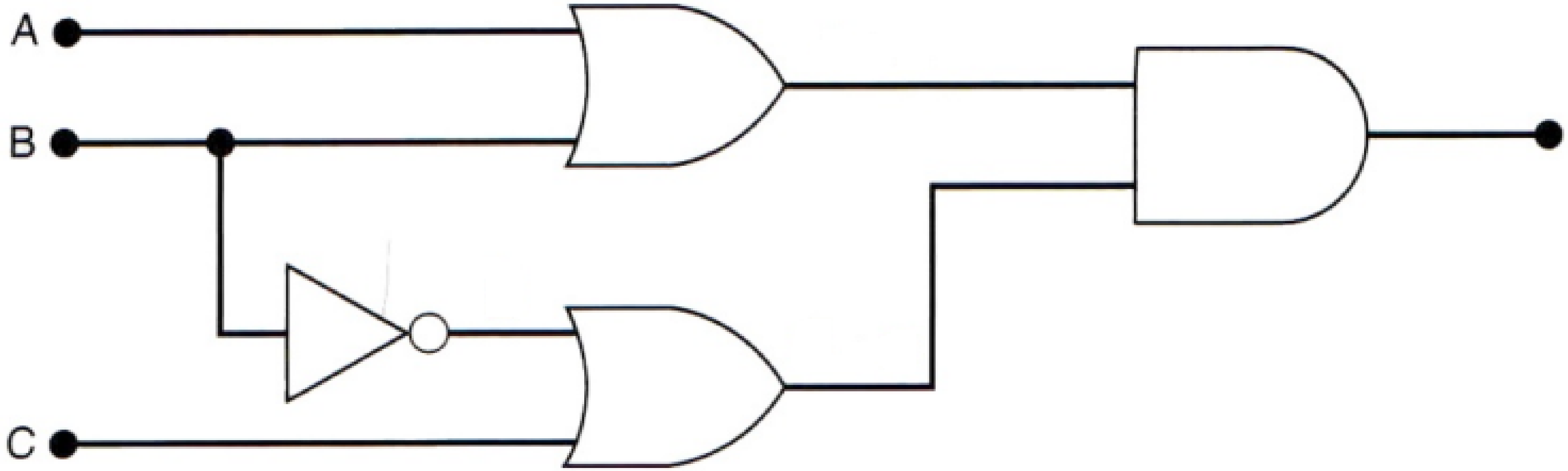
$0 + 0 = 0$
$0 + 1 = 1$
$1 + 0 = 1$
$1 + 1 = 1$

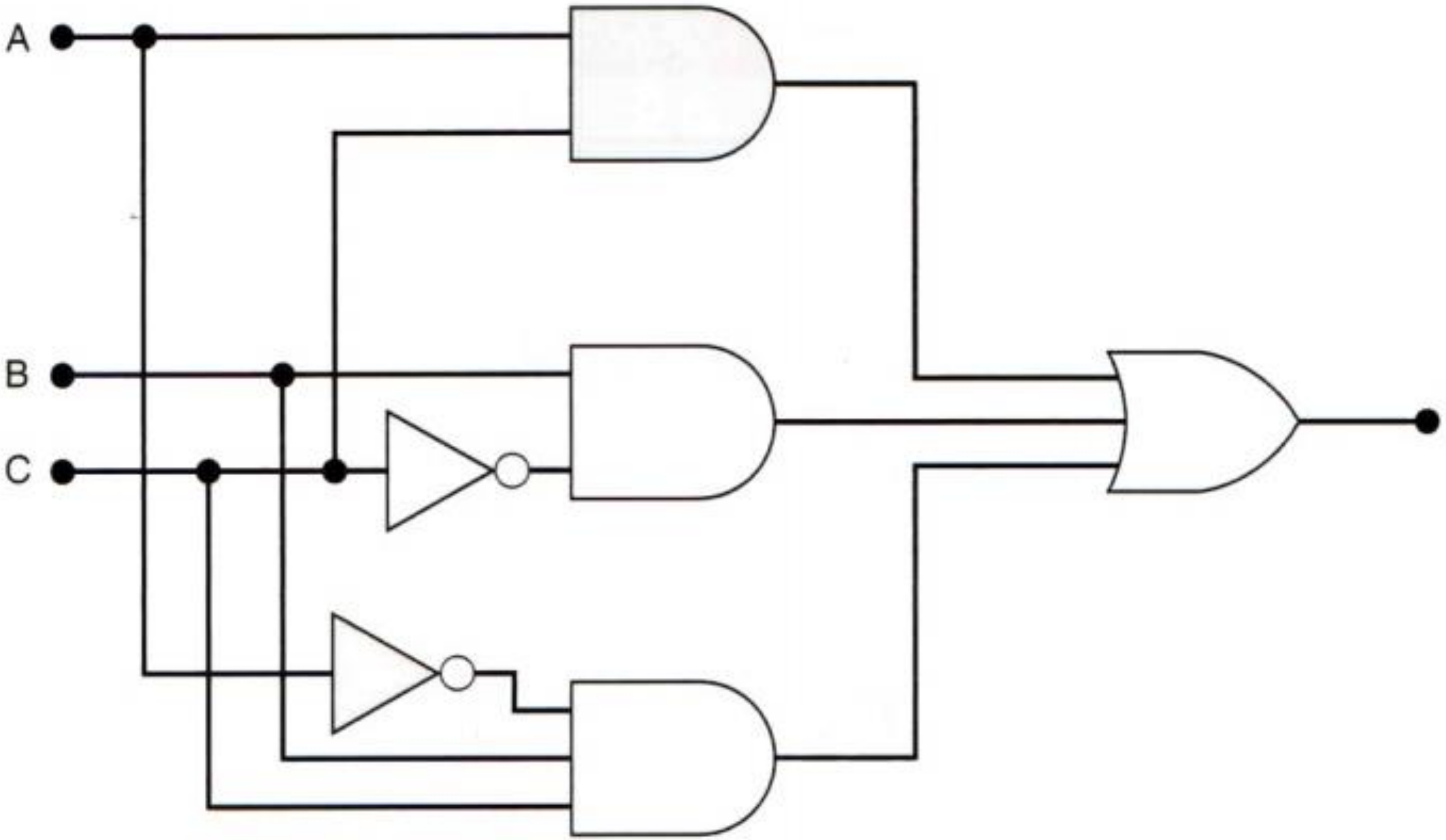
A	B	$\bar{A}$+ B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1



A	B	C	D	$\overline{A}BC(\overline{A+D})$
1	1	1	1	0
1	1	1	0	0
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0


A
B
C
D
E


A
B
C


A
B
C

ALGEBRA DE CONJUNTOS

OPERACIONES CON CONJUNTOS

¿Qué es un **Conjunto?**

- Es una agrupación finita o infinita de objetos conocidos como elementos, los cuales se representan con letras minúsculas **a, b, c, …**

- Regularmente se representan con llaves (**{ }**) y se denotan con letras mayúsculas **A, B, C …**

Ejemplo:

A = { Santander, Cartagena, Antioquia}
a = { Santander}

OPERACIONES CON CONJUNTOS

SUBCONJUNTOS

Son los conjunto cuya totalidad de elementos estén contenidos en otro conjunto.
Ejemplo:

Sea el conjunto

A = { Todos los departamentos de la República Colombiana}

Y el conjunto

b = { Santander, Bolivar, Antioquia}

Entonces:

$$b \subset A$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

PERTENENCIA

Son los conjunto cuya totalidad de elementos estén contenidos en otro conjunto.

Ejemplo:

Sea el conjunto

A = {Todos los departamentos de la República Colombiana}

Y el conjunto

b = {Santander, Bolivar, Antioquia}

Entonces:

$$\mathbf{b} \in \mathbf{A}$$

Y el conjunto

c = { Caracas, Buenos Aires}

Entonces:

$$c \notin A$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

UNION

Se da cuando se conjuntan los elementos de un conjunto y otro para formar un solo conjunto.

Ejemplo:

Sean los conjuntos

A = { 1, 2, 3, 4, 5}   B={6, 7, 8 , 9}

Entonces:

$$\mathbf{A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}}$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

UNION

Ejemplo 1. A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, h}

A U B = {a, b, c, d, e, h}

Ejemplo 2. C = {personas rubias}, D = {personas altas}.

C U D = {personas rubias o altas}

OPERACIONES CON CONJUNTOS

UNION - EJEMPLOS

A={José, Jerónimo}, B={María, Mabel, Marcela}; AUB=?

P={pera, manzana}, C={limón, naranja}; F={cereza, grosella}; PUCUF = ?

M={7, 9, 11}, N={4, 6, 8}; MUN=?

R={pelota, patín, paleta}, G={paleta, pelota, patín}; RUG=?

C={margarita}, S={clavel}; CUS = ?

C= {margarita}, S={clavel}; T={botella}, CUSUT =?

G={verde, azul, negro}, H={negro}; GUH=?

A={ 1, 3, 5, 7, 9 }; B={ 10, 11, 12 }; AUB=?

D= {martes, jueves}, E= {miércoles, viernes}; DUE = ?

OPERACIONES CON CONJUNTOS

UNION - EJEMPLOS

B= {mosquito, abeja, colibrí}; C={vaca, perro, caballo}; BUC= ?

A={2, 4, 6, 8}, B={1, 2, 3, 4}; AUB=?

P={mesa, silla}, Q={mesa, silla}; PUQ=?

A={pan}, B={queso}; AUB=?

A={20, 30, 40}, B= {5, 15}; AUB =?

M={enero, febrero, marzo, abril}, N={noviembre, diciembre}; MUN=?

F={12, 22, 32, 42}, G={a, e, i, o, u}; FUG=?

A={verano}, B= {invierno}; AUB=?

S= {sandalia, zapatilla, ojota}, R={camisa}; SUR=?

H={lunes, martes}, R={lunes, martes}, D={lunes, martes}; HURUD=?

P={rojo, azul}, Q= {verde, amarillo}, PUQ=?

OPERACIONES CON CONJUNTOS

INTERSECCIÓN

Es el resultado de los elementos que tienen en común un conjunto y otro.
Ejemplo:

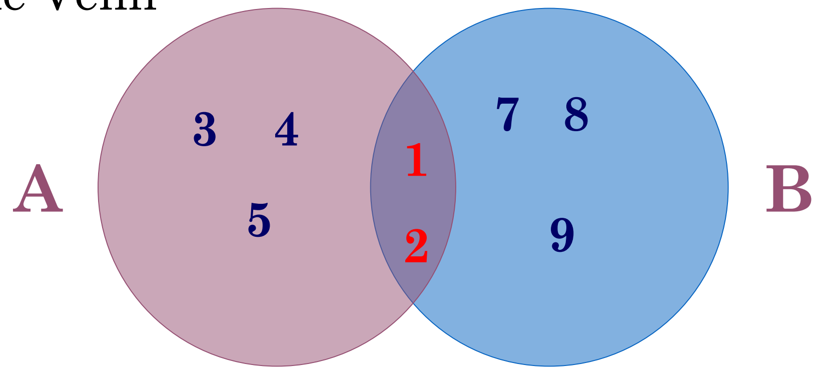
Sean los conjuntos

$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B=\{1, 2, 7, 8, 9\}$

Entonces:

$A \cap B = \{1, 2\}$

Como Diagrama de Venn



OPERACIONES CON CONJUNTOS

INTERSECCIÓN

Ejemplo 1. A = {a, b, c, d}, B = {c, d, e, h}.

$$A \cap B = \{c, d\}.$$

Ejemplo 2. C = {personas rubias}, D = {personas altas}.

$$C \cap D = \{\text{personas rubias y altas}\}$$

uts Unidades Tecnológicas de Santander

OPERACIONES CON CONJUNTOS

INTERSECCIÓN

Si dos conjuntos A y B no tienen en común ningún elemento, se dice que son *disjuntos,* y verifican

$$A \cap B = \emptyset.$$

Ejemplo. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e, f, g, h, i, j\}$.

$$A \cap B = \emptyset.$$

En el caso de conjuntos disjuntos se verifica que

$$card(A \cup B) = card(A) + card(B).$$

OPERACIONES CON CONJUNTOS

INTERSECCIÓN EJEMPLOS

- Dados **A={a, b, 1, 2, 3}** y **B={3, 4}**; se tiene que **A ∩ B=?**
- Dados **A={a, b}** y **B={a, b, u, v}**; se tiene que **A ∩ B=?**
- Dados **A={a, b, c, d, e, f, g}** y **B={d, e, f, g, h, i}**; se tiene que **A ∩ B=?**
- Dados **A={lunes, martes}** y **B={martes, viernes, sábado, domingo}**; se tiene que **A ∩ B={martes}**
- Dados **A={a, o}** y **B={a, e, i, o, u}**; se tiene que **A ∩ B=?**
- Dados **A={primavera, verano, otoño}** y **B={verano, otoño}**; se tiene que **A ∩ B=?**
- Dados **A={Venus, Tierra, Saturno, Urano}** y **B={Marte, Júpiter, Saturno, Urano, Neptuno}**; se tiene que **A ∩ B=?**

OPERACIONES CON CONJUNTOS

COMPLEMENTO

Son todos los elementos que no están en el conjunto en cuestión.

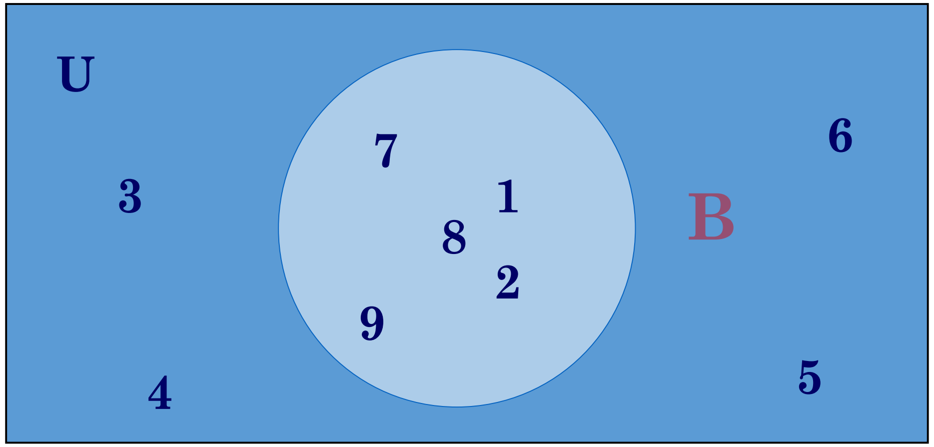
Ejemplo:

Sean los conjuntos

U = { Los número Naturales ($\mathbb{N}$)} y B={1, 2, 7, 8 , 9}

Entonces:

B'={3, 4, 5, 6}



OPERACIONES CON CONJUNTOS

COMPLEMENTO EJEMPLOS

Sean los conjuntos: U={1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8} A={1 ; 3 ; 4 ; 7 ; 8} * Entonces: A’=?

C= {Patricia, Paola, Penélope, Paloma} U= {Palmira, Patricia, Paola, Penélope, Pamela, Paula, Priscila, Pilar, Pastora} C’

OPERACIONES CON CONJUNTOS

DIFERENCIA ABSOLUTA

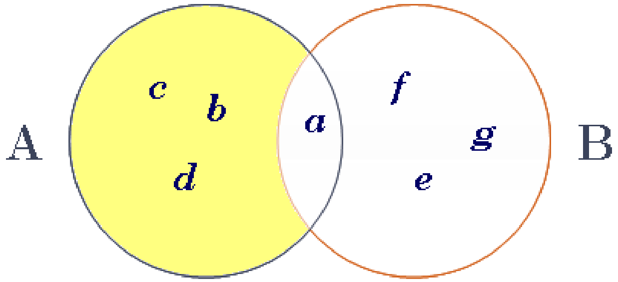
Entre dos conjuntos, son todos los elementos que están en un conjunto A, pero no en B.
Ejemplo:

Sean los conjuntos

A = { *a, b, c, d*} y B={*a, e, f, g*}

Entonces:

$$A \setminus B = \{b, c, d\}$$



OPERACIONES CON CONJUNTOS

DIFERENCIA SIMETRICA

Entre dos conjuntos, son todos los elementos que están en un conjunto A y en B pero no en **ambos**.

Ejemplo:

Sean los conjuntos

A = { a, b, c, d} y B={a, e, f, g}

Entonces:

$$A \oplus B = \{b, c, d, e, f, g\}$$