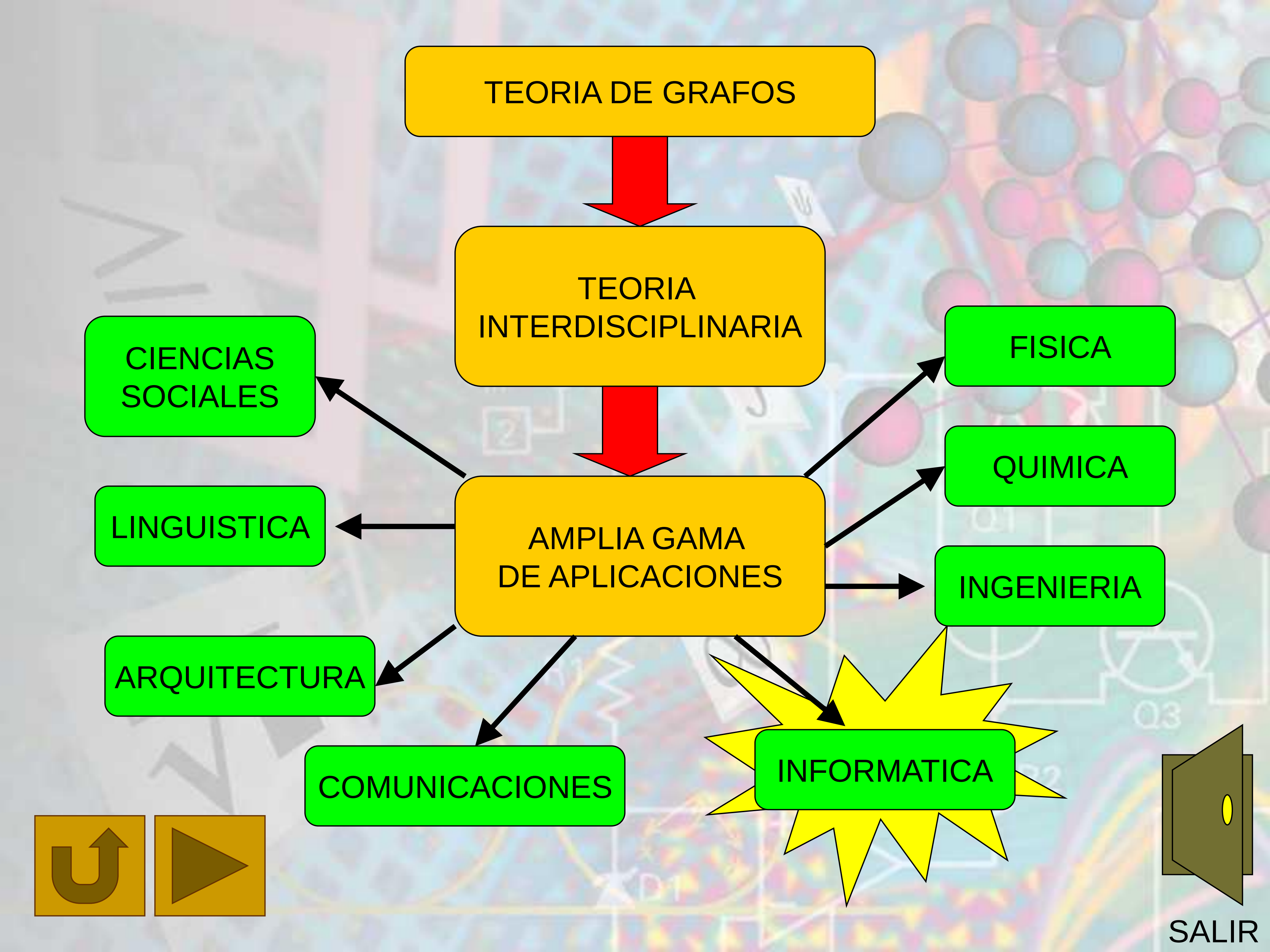
INTRODUCCION

GRAFOS

DIGRAFOS

ÁRBOLES

SALIR


TEORIA DE GRAFOS
TEORIA INTERDISCIPLINARIA
AMPLIA GAMA DE APLICACIONES
CIENCIAS SOCIALES
LINGUISTICA
ARQUITECTURA
COMUNICACIONES
INFORMATICA
INGENIERIA
QUIMICA
FISICA
SALIR

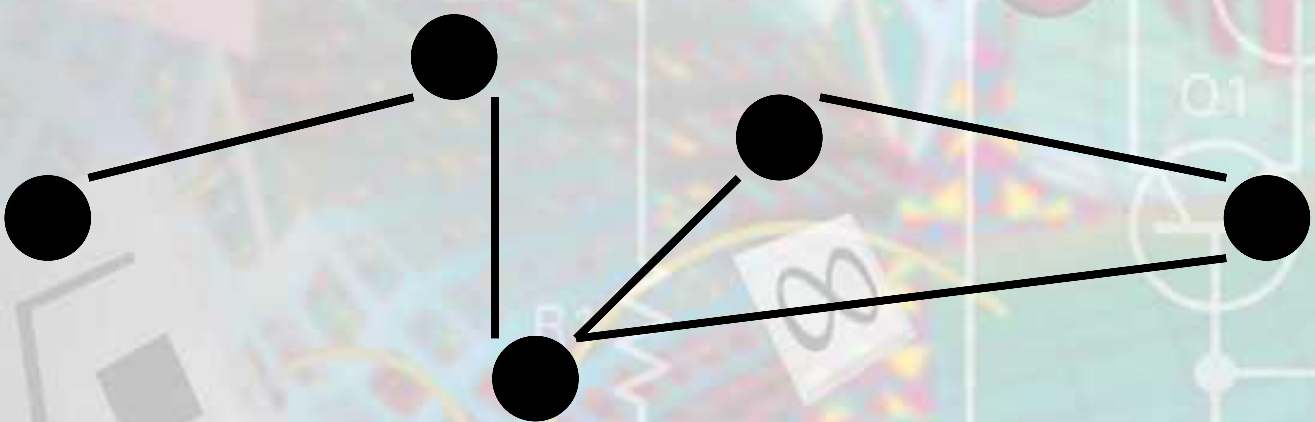

GRAFOS
SE UTILIZAN PARA
MODELAR SITUACIONES
MODELO:
ES UNA
REPRESENTACION SIMPLIFICADA
DEBE TENER EN CUENTA
DEBE IGNORAR
CARACTERISTICAS RELEVANTES
DETALLES INNECESARIOS

SALIR

DEFINICION INFORMAL

GRAFO:

conjunto de PUNTOS o NODOS unidos por ARISTAS.



SALIR

DEFINICION FORMAL de GRAFO

VER DEFINICION INFORMAL

Un grafo es una terna $G = (V, A, \varphi)$

CONJUNTO DE VERTICES
$V \neq \emptyset$

CONJUNTO DE ARISTAS

FUNCION DE INCIDENCIA

$\varphi : A \to V^{(2)}$

$V^{(2)}$ es el conjunto formado por subconjuntos de 1 o 2 elementos de V, que son los extremos de la arista.

VER EJEMPLO

SALIR

EJEMPLO:

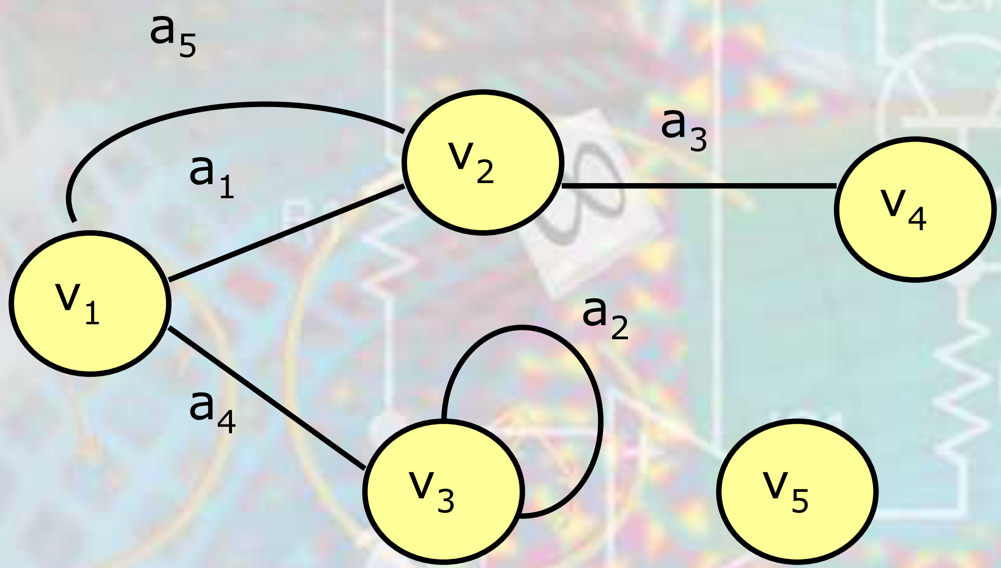
Sea el grafo G =(V, A, φ) siendo los conjuntos:

$V = \{ v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 \}$ $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 \}$

Y la función de incidencia: $\varphi(a_1)=\{v_1, v_2\}$, $\varphi(a_2)=\{v_3\}$,

$\varphi(a_3)=\{v_4,v_2\}$, $\varphi(a_4)=\{v_1,v_3\}$, $\varphi(a_5)=\{v_1, v_2\}$

¿QUIERES VER COMO SE PUEDE DIAGRAMAR?



SALIR

Otras DEFINICIONES de GRAFOS

- VERTICES ADYACENTES
- ARISTAS ADYACENTES
- ARISTAS INCIDENTES EN UN VERTICE
- ARISTAS PARALELAS
- VERTICE AISLADO
- BUCLES O LAZOS
- GRAFO SIMPLE
- GRADO O VALENCIA
- REPRESENTACION MATRICIAL DE GRAFOS
- CAMINOS Y CICLOS
- GRAFOS REGULARES
- GRAFOS BIPARTITOS
- GRAFOS CONEXOS
- ISOMORFISMOS

SALIR

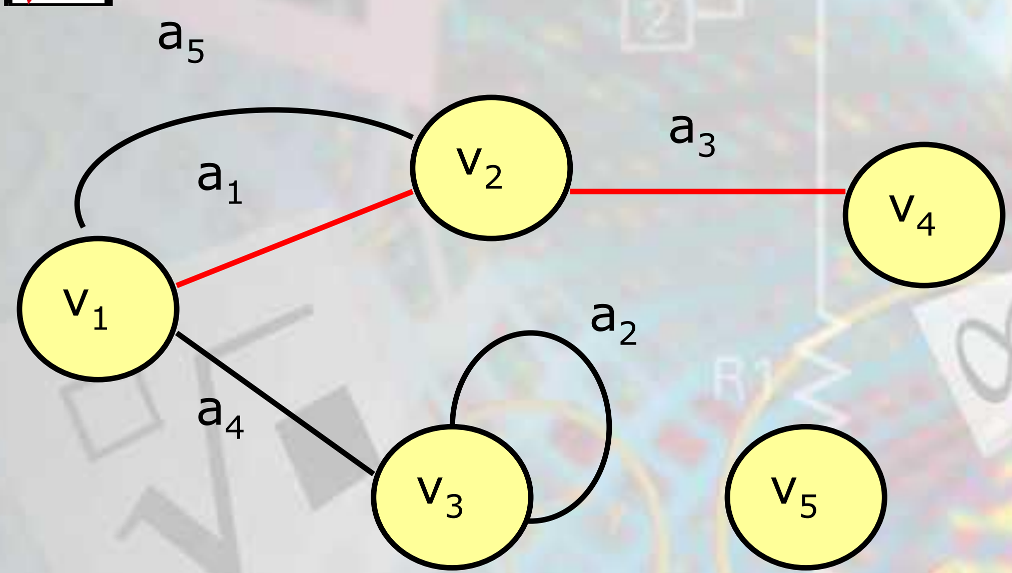
VERTICES ADYACENTES

v_i es adyacente a $v_j \Leftrightarrow$
$\exists\, a_k \in A$ tal que $\varphi\,(a_k) = \{ v_i, v_j \}$

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

Que son vértices que están unidos por alguna arista

EJEMPLO:



v_2 es adyacente a v_1 y a v_4
pero no a v_3

SALIR

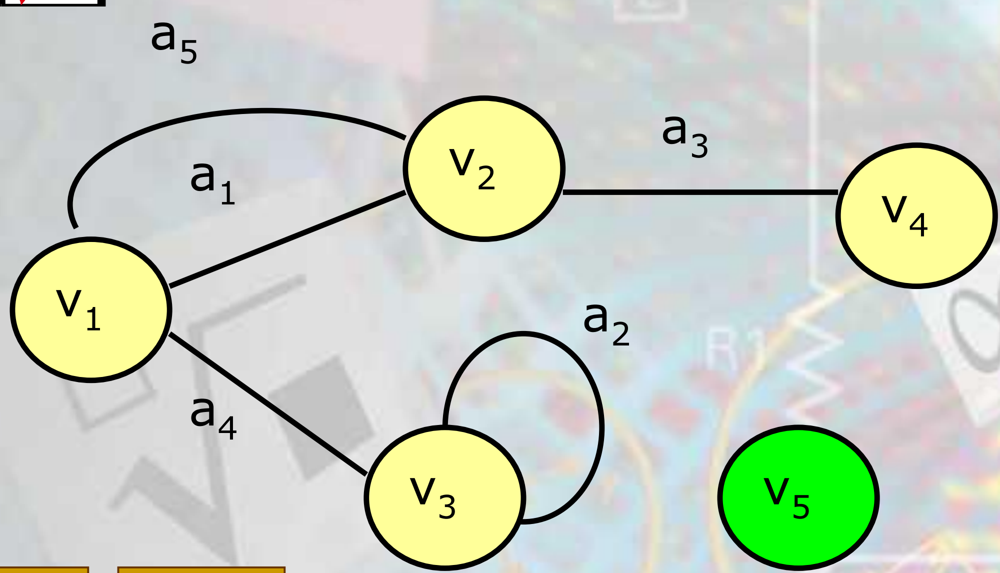
VERTICE AISLADO

v_i es aislado $\Leftrightarrow \forall\, v_k \in V$:
Si $v_i \neq v_k$. : v_i no es adyacente a v_k

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

Que es un vértice que no es adyacente a ningún otro.

EJEMPLO:



v_5 es aislado

SALIR

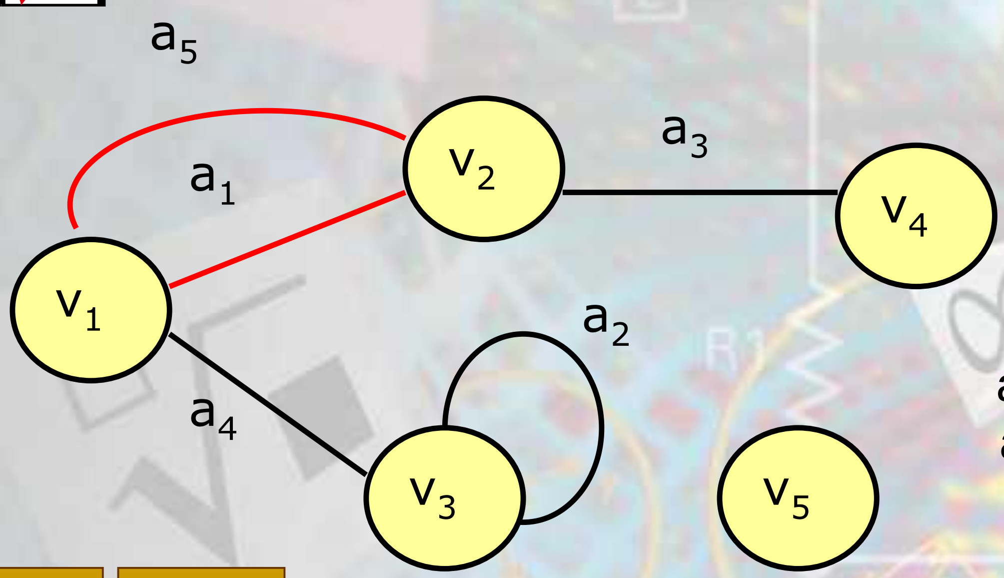
ARISTAS PARALELAS

a_i es paralela a $a_k \Leftrightarrow \varphi(a_i) = \varphi(a_k)$

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

Que son aristas comprendidas entre los mismos vértices.

EJEMPLO:



a_5 y a_1 son paralelas ya que ambas están comprendidas entre los vértices v_1 y v_2.

SALIR

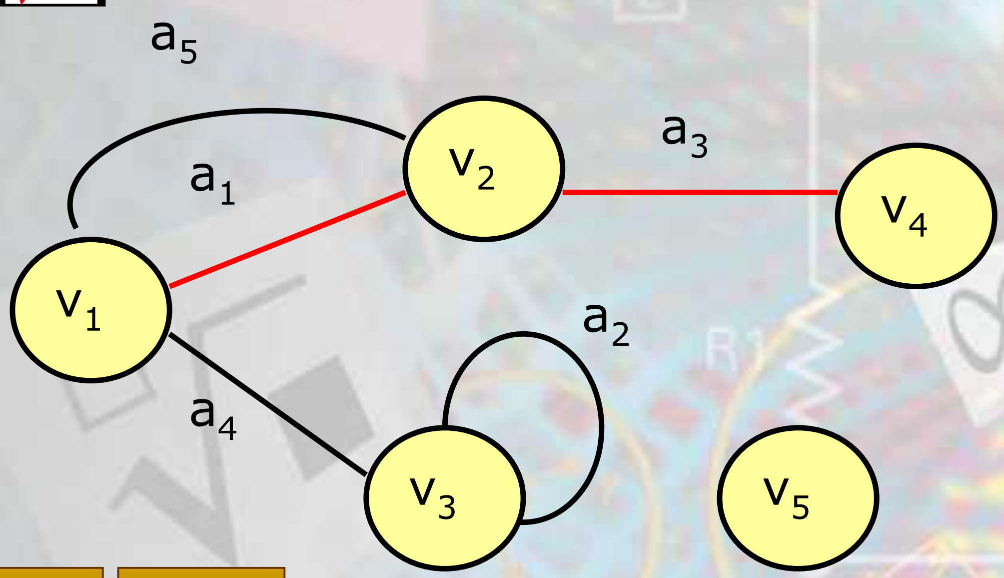
ARISTAS ADYACENTES

a_i es paralela a $a_k \Leftrightarrow$
$|\,\varphi(a_i) \cap \varphi(a_k)\,| = 1$

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

Que son aristas que tienen un único vértice en común.

EJEMPLO:



a_3 y a_1 son adyacentes ya que el único vértice en común entre ambas es v_2.

SALIR

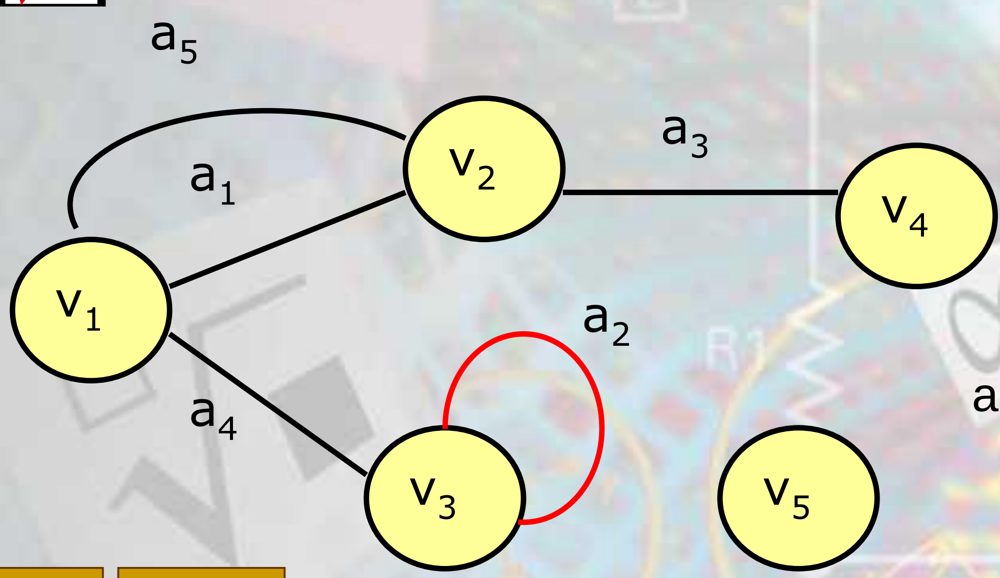
BUCLES O LAZOS

a_i es BUCLE O LAZO $\Leftrightarrow$
$|\varphi(a_i)| = 1$

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

Que son aristas con ambos extremos en el mismo vértice.

EJEMPLO:



a_2 es BUCLE pues ambos extremos de ella es el vérticev_3.

SALIR

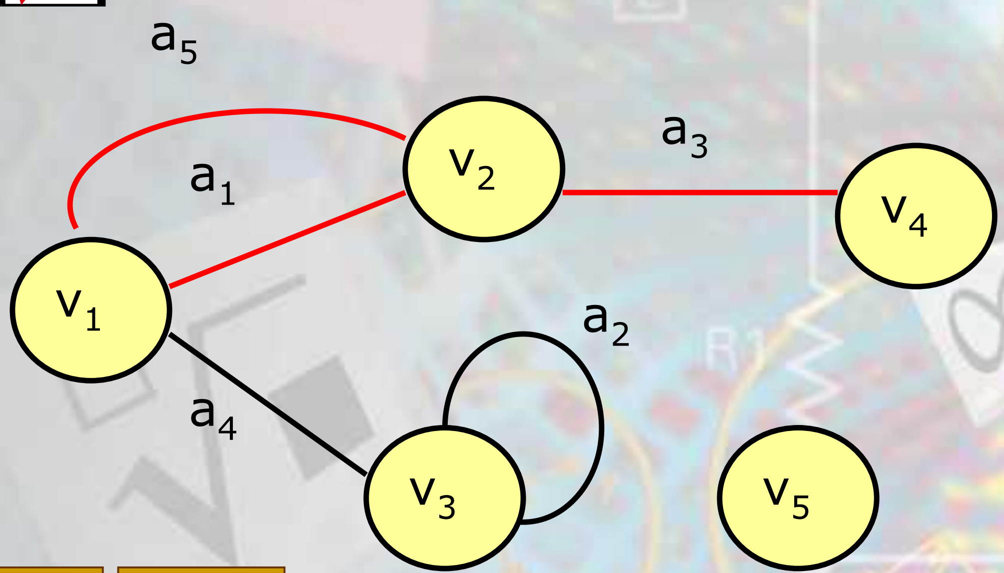
ARISTAS INCIDENTES EN UN VERTICE

a_i es INCIDENTE a $v_k \Leftrightarrow v_k \in \varphi\ (a_i)$

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

Que son aristas las aristas que tienen a dicho vértice por extremo.

EJEMPLO:



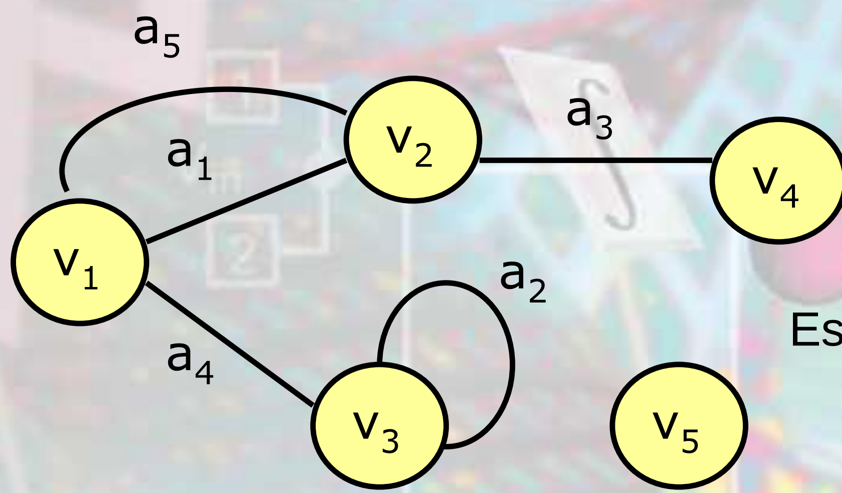
Las aristas a_1, a_3 y a_5 son incidentes en el vértice v_2

SALIR

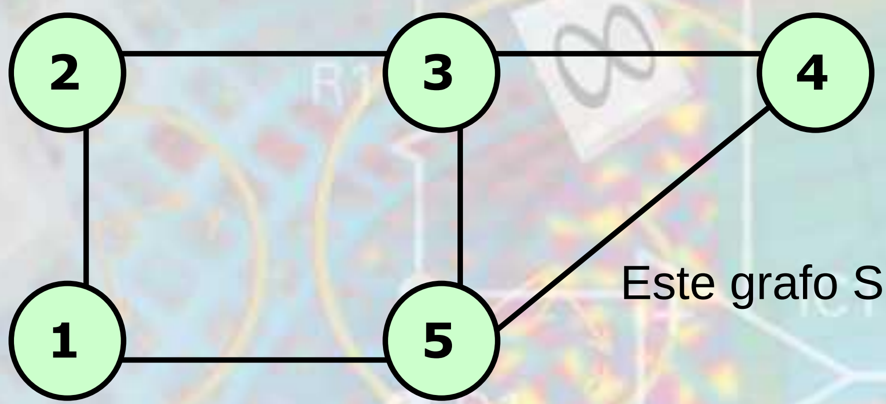
GRAFO SIMPLE

G es simple si y sólo si no tiene aristas paralelas ni bucles.

EJEMPLOS:



Este grafo NO es simple



Este grafo SI es simple

SALIR

REPRESENTACION MATRICIAL DE GRAFOS:

Sea un grafo $G = (V, A, \varphi)$

con $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ y $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m \}$

Se pueden definir dos matrices:

MATRIZ DE ADYACENCIA

DEFINICION Y EJEMPLO

MATRIZ DE INCIDENCIA

DEFINICION Y EJEMPLO

SALIR

MATRIZ DE ADYACENCIA → MATRIZ BOOLEANA de n x n

Ma(G) cuyos elementos m_{ij}

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es adyacente a } v_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es adyacente a } v_j \end{cases}$$

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

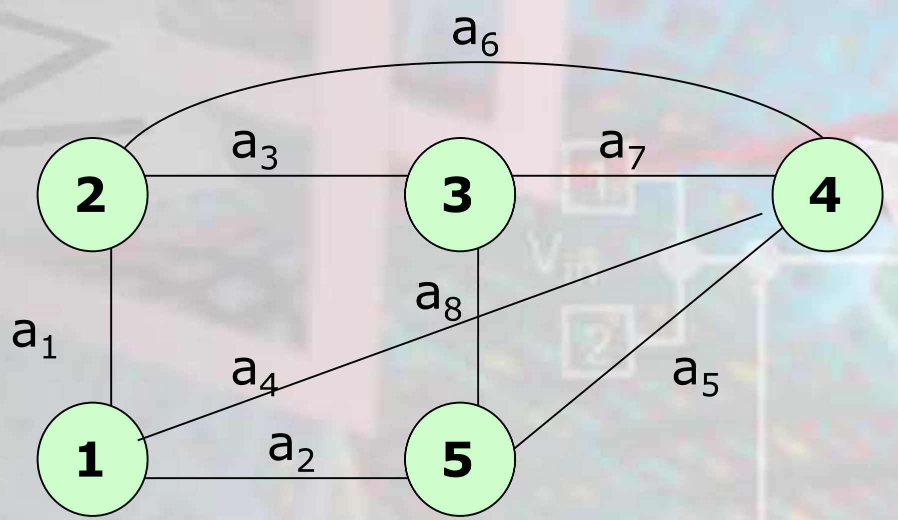
Que la matriz de adyacencia es una matriz cuadrada, las filas y las columnas representan los vértices, y los valores de los elementos son 1 si ambos vértices son adyacentes, y valen 0 en caso de no serlo.

VER EJEMPLO

SALIR

EJEMPLO:

Dado este grafo:



La matriz de adyacencia es:

$$Ma(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

SALIR

MATRIZ DE INCIDENCIA → MATRIZ BOOLEANA de n x m

Mi(G) → cuyos elementos → m_{ij}

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es extremo de } a_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } a_j \end{cases}$$

¿QUE SIGNIFICA ESTO?

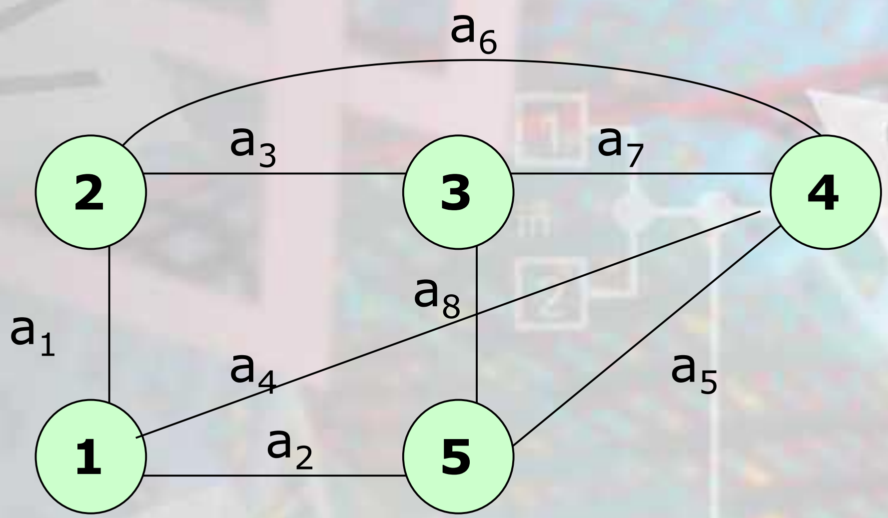
Que la matriz de incidencia es una matriz rectangular, las filas representan los vértices, y las columnas representan las aristas, y los valores de los elementos son 1 si el vértice es extremo de la arista, y valen 0 en caso de no serlo.

VER EJEMPLO

SALIR

EJEMPLO:

Dado este grafo:



La matriz de incidencia es: $\quad Mi(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

SALIR

GRADO O VALENCIA

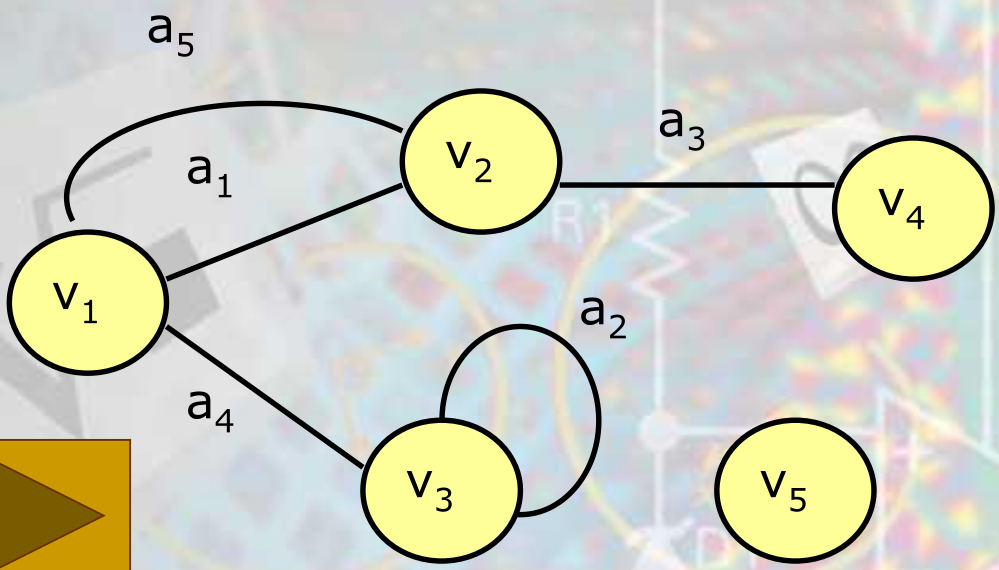
Sea un grafo $G = (V, A, \varphi)$

Función grado: $g: V \rightarrow N_0$

$g(v_i)$ = cantidad de aristas incidentes en v_i

Nota: los bucles se cuentan doblemente.

EJEMPLO:



Los grados de los vértices son:

$g(v_1) = 3$
$g(v_2) = 3$
$g(v_3) = 3$
$g(v_4) = 1$
$g(v_5) = 0$

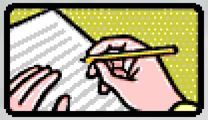
SALIR

PROPIEDAD

En todo grafo se cumple que la suma de los grados de los vértices es igual al doble de la cantidad de aristas.

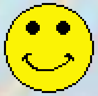
En símbolos:

$$\sum g(v_i) = 2\,|A|$$



EJERCICIO

¿Cuál es la cantidad total de vértices de un grafo que tiene 2 vértices de grado 4, uno de grado 3, 5 de grado 2 y el resto colgantes (de grado 1) sabiendo que en total hay 12 aristas?



VER SOLUCION

SALIR

EJERCICIO

¿Cuál es la cantidad total de vértices de un grafo que tiene 2 vértices de grado 4, uno de grado 3, 5 de grado 2 y el resto colgantes (de grado 1) sabiendo que en total hay 12 aristas?

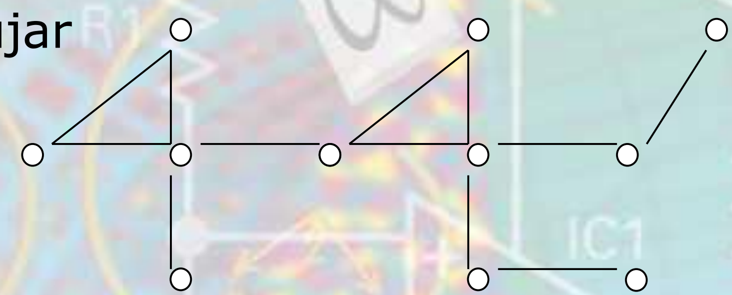
SOLUCION:

Usando la propiedad anterior: $2 \bullet 4 + 1 \bullet 3 + 5 \bullet 2 + x \bullet 1 = 2 \bullet 12$

Resolviendo: $21 + x = 24 \Rightarrow x = 3$ (cantidad de vértices colgantes)

Por lo tanto la cantidad total de vértices es: $|V| = 2 + 1 + 5 + 3 = 11$

UNA forma posible de dibujar este grafo sería:



¿Te animas a dibujar otras posibilidades?

SALIR

CAMINOS Y CICLOS EN GRAFOS:

CAMINO → sucesión de aristas adyacentes distintas

CICLO (o circuito) → camino cerrado (vértice inicial = vértice final)

LONGITUD de un camino → cantidad de aristas que lo componen

CAMINO SIMPLE → si todos los vértices son distintos

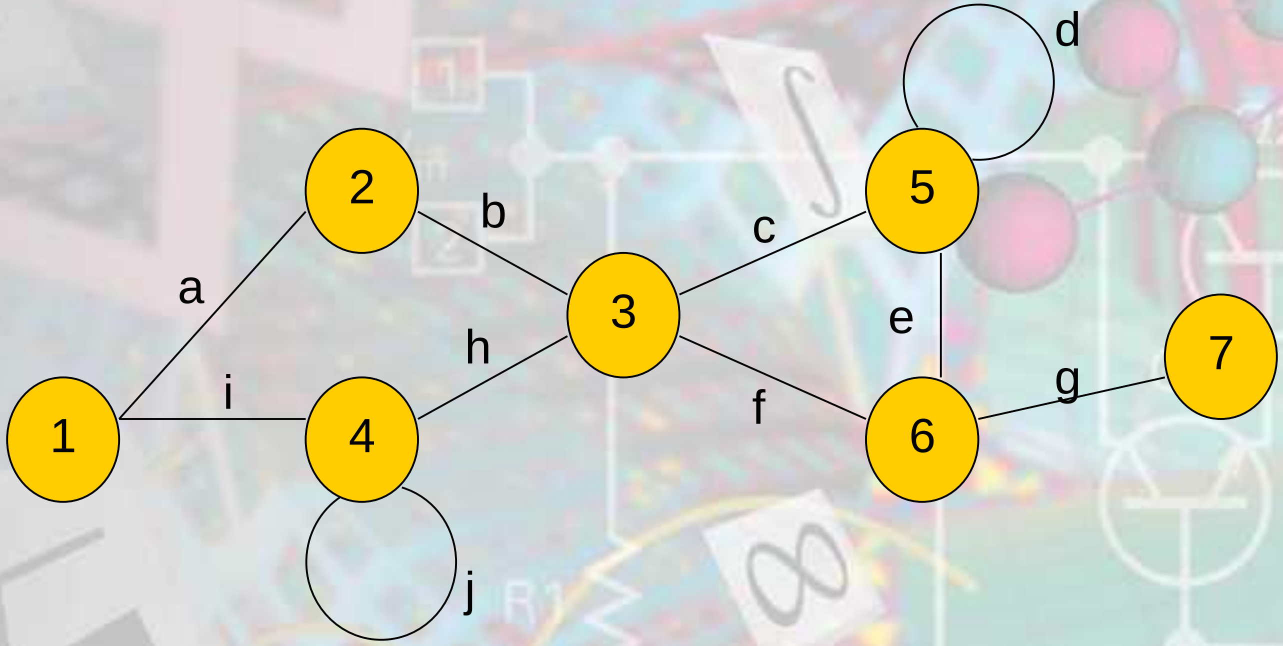
VER EJEMPLO

CAMINOS ESPECIALES

SALIR

EJEMPLO:

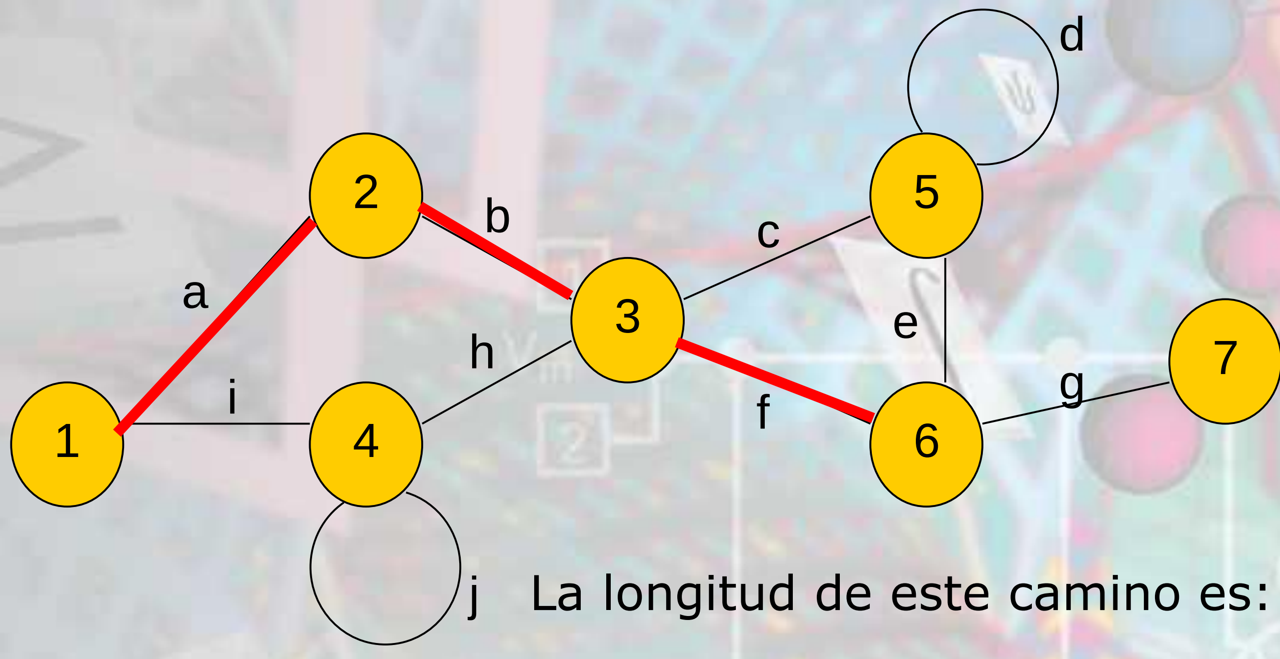
En el siguiente grafo: G =(V,A, φ) con V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, A={a, b, c, d, e, f, g, h, i, j}, busquemos caminos entre los vértices “1” y “6”, e indiquemos la longitud de cada uno de ellos:



VER SOLUCION

SALIR

Un posible camino es: $C_1 = (\ 1,\ a,\ 2,\ b,\ 3,\ f,\ 6\ )$



La longitud de este camino es: $\text{long}[C_1] = 3$

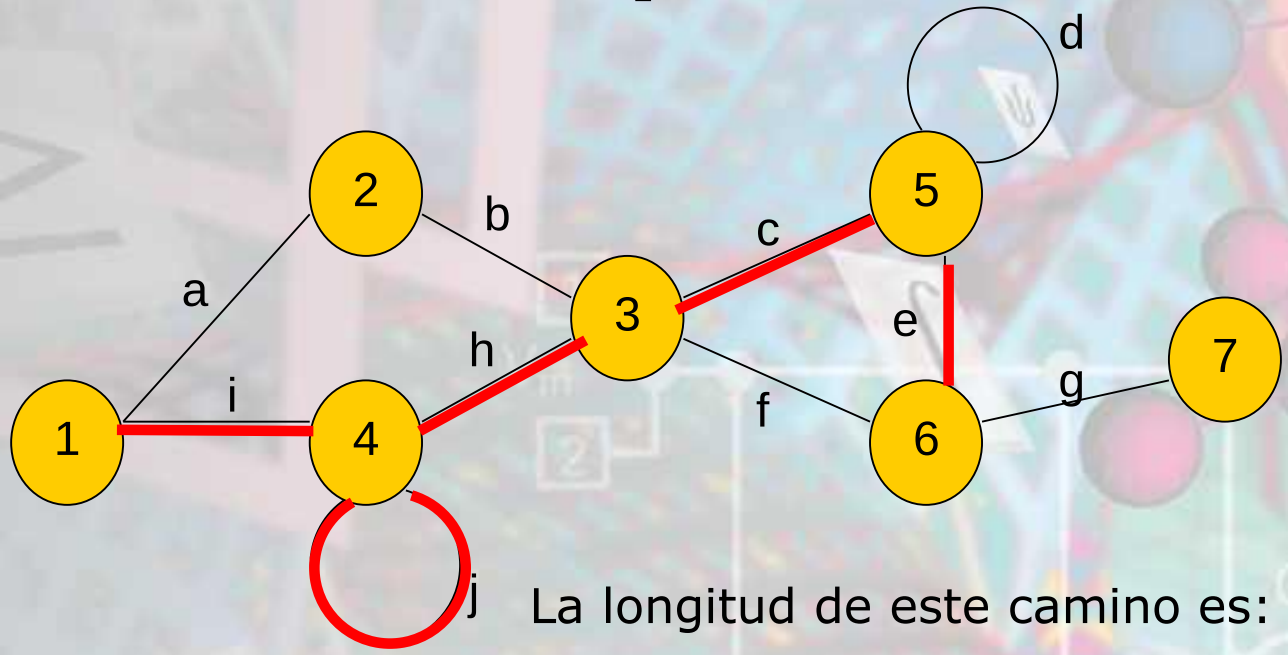
¿Este camino es SIMPLE?

Sí, este camino es SIMPLE pues no repite vértices.

VER OTRO CAMINO

SALIR

Otro posible camino es: C_2 = (1, i, 4, j, 4, h, 3, c, 5, e, 6)



La longitud de este camino es: long[C_2] = 5

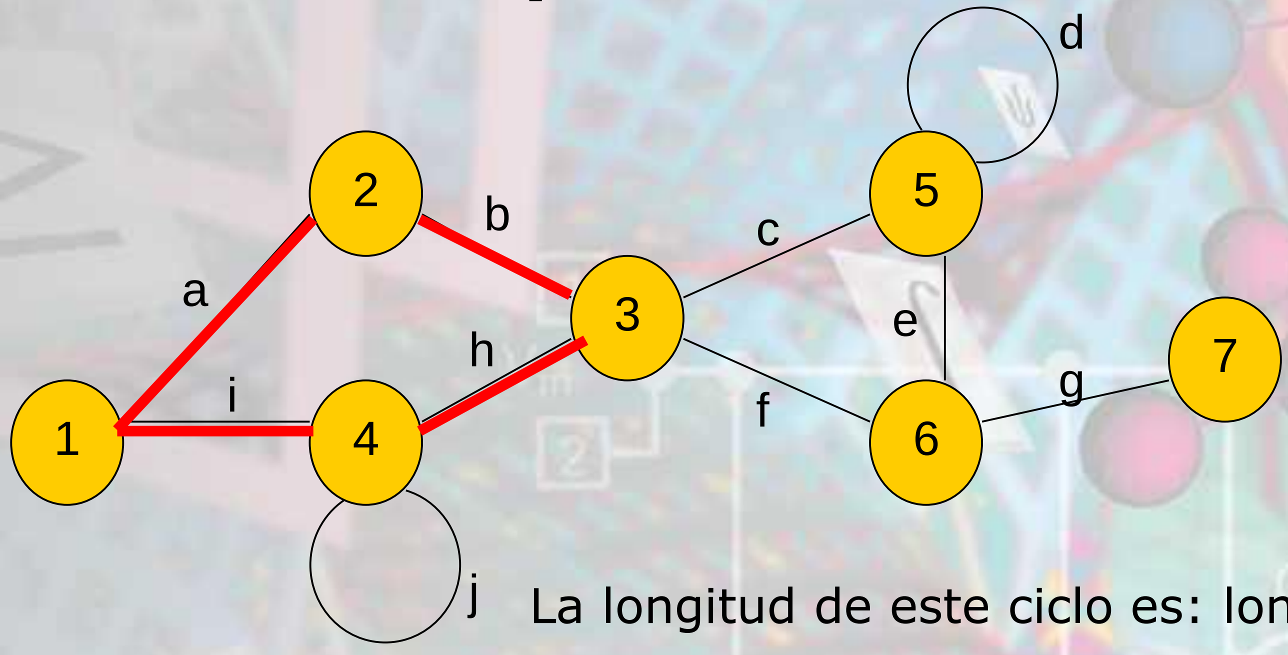
¿Este camino es SIMPLE?

NO, este camino NO es SIMPLE pues repite el vértice 4.

VER CICLOS

SALIR

Un posible ciclo es: $C_1 = (1, a, 2, b, 3, h, 4, i, 1)$



La longitud de este ciclo es: $long[C_1] = 4$

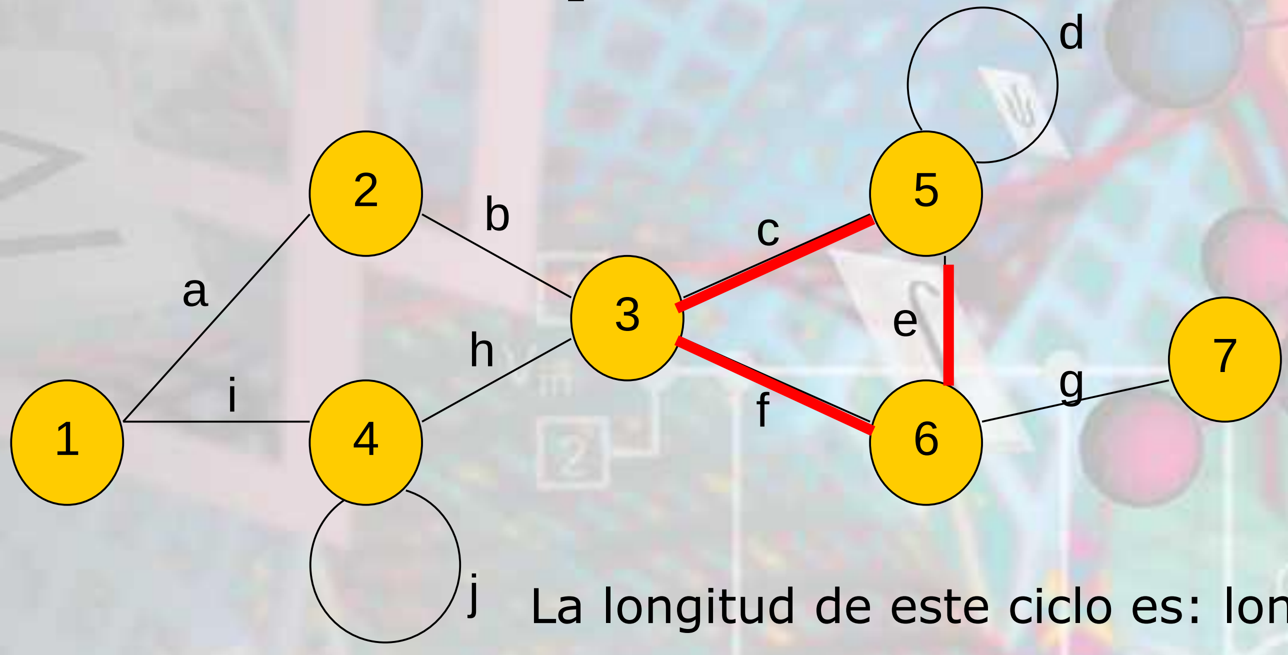
¿Este ciclo es SIMPLE?

Sí, este ciclo es SIMPLE pues no repite vértices.

VER OTRO CICLO

SALIR

Otro posible ciclo es: $C_2 = (3, c, 5, e, 6, f, 3)$



La longitud de este ciclo es: $\text{long}[C_2] = 3$

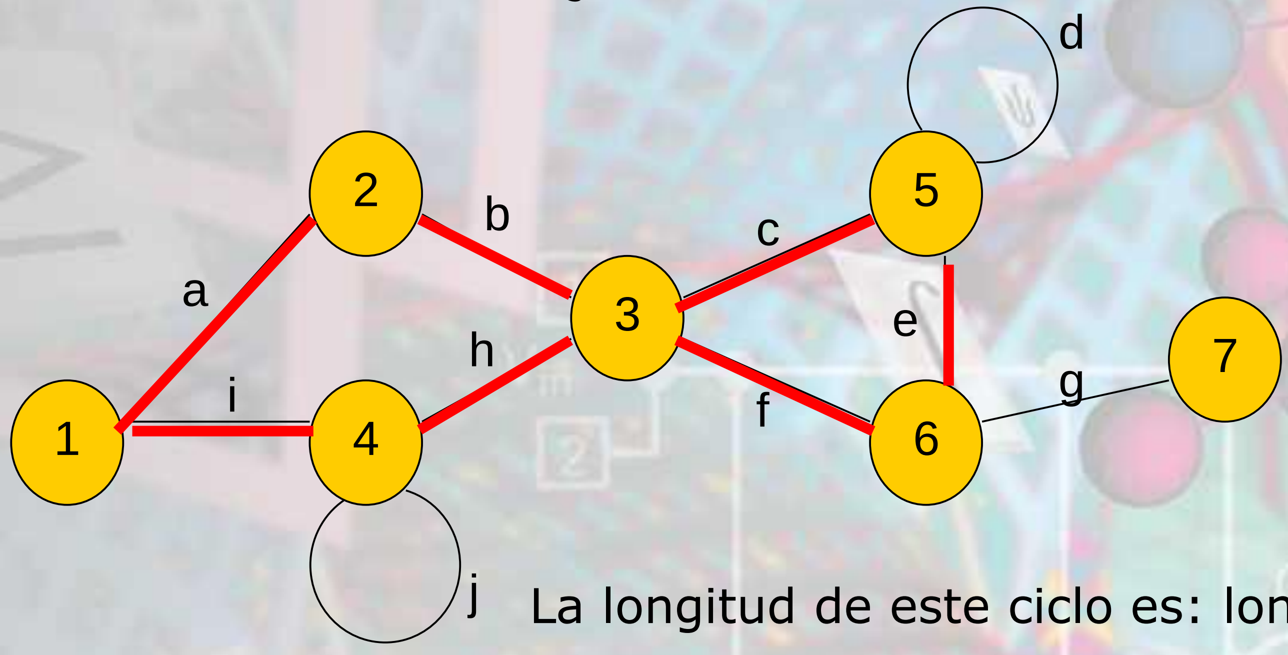
¿Este ciclo es SIMPLE?

Sí, este ciclo es SIMPLE pues no repite vértices.

VER OTRO CICLO

SALIR

Otro posible ciclo es: $C_3 = (\ 1, a, 2, b, 3, c, 5, e, 6, f, 3, h, 4, i, 1\ )$



La longitud de este ciclo es: $long[C_3] = 7$

¿Este ciclo es SIMPLE?

No, este ciclo NO es SIMPLE pues repite el vértice 3.

CAMINOS ESPECIALES

SALIR

CAMINOS Y CICLOS ESPECIALES

Hay unos tipos de caminos especiales, que son muy importantes por sus aplicaciones:

CAMINOS Y CICLOS EULERIANOS

DEFINICION Y EJEMPLO

CAMINOS Y CICLOS HAMILTONIANOS

DEFINICION Y EJEMPLO

SALIR

CAMINOS Y CICLOS EULERIANOS

CAMINO DE EULER → camino que pasa por todas las aristas

CICLO DE EULER → Ciclo que pasa por todas las aristas del grafo

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista camino euleriano es:
El grafo debe ser conexo, y
todos los vértices deben tener grado par, o a lo sumo dos grado impar.

La condición necesaria y suficiente para que en un grafo exista ciclo euleriano es:
El grafo debe ser conexo, y todos los vértices deben tener grado par.

VER EJEMPLO

SALIR

CAMINOS Y CICLOS HAMILTONIANOS

CAMINO DE HAMILTON → camino simple que pasa por todos los vértices

CICLO DE HAMILTON → ciclo simple que pasa por todos los vértices

Observación: no necesariamente va a pasar por todas las aristas, pues en muchos casos repetiría vértices y no sería hamiltoniano.

VER EJEMPLO

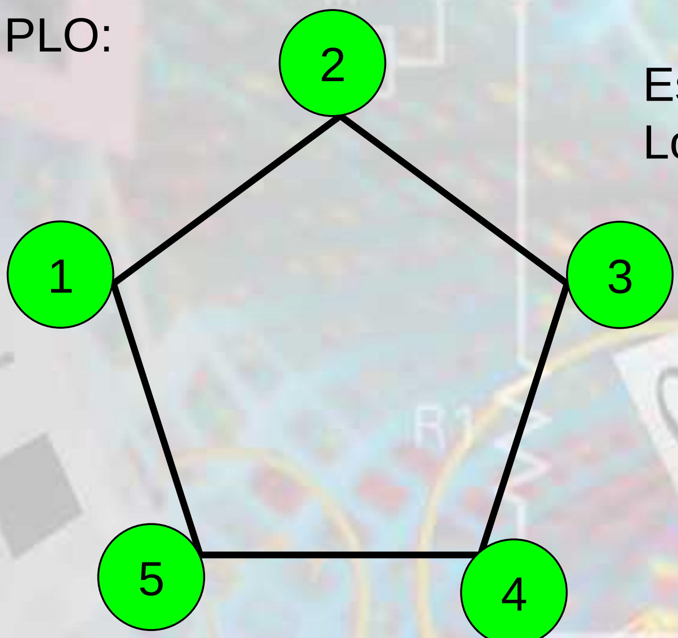
SALIR

GRAFOS REGULARES

GRAFO K-REGULAR

G es k-regular $\Leftrightarrow \forall\ v \in V : g(v) = k$
Con $k \in N_0$

EJEMPLO:



Este grafo es 2-regular pues todos
Los vértices tienen grado 2.

VER GRAFOS Kn

SALIR

ISOMORFISMOS DE GRAFOS

Dados dos grafos: $G_1 = (V_1, A_1, \varphi_1)$ y $G_2 = (V_2, A_2, \varphi_2)$

Se dice que son **isomorfos** si y solo si existen dos <u>funciones biyectivas</u>

$f: V_1 \rightarrow V_2$ y $g : A_1 \rightarrow A_2$ tales que: $\forall\, a \in A_1 : \varphi_2(g(a)) = f(\varphi_1(a))$

Si no hay aristas paralelas, entonces es suficiente:

$$\forall\, u, v \in V_1 : \{u, v\} \in A_1 \Rightarrow \{ f(u), f(v) \} \in A_2$$

Esto significa que si en el primer grafo hay una arista entre dos vértices, los correspondientes a estos vértices en el segundo grafo también deben estar unidos por una arista.

En pocas palabras, dos grafos son isomorfos cuando tienen la misma estructura, es decir sus vértices están relacionados de igual forma aunque estén dibujados de manera distinta.

VER condiciones

VER EJEMPLO

SALIR

DEFINICION FORMAL de DIGRAFO

Un digrafo es una terna $G = (V , A , \delta)$

CONJUNTO DE VERTICES $V \neq \varnothing$

CONJUNTO DE ARISTAS DIRIGIDAS

FUNCION DE INCIDENCIA

$\varphi : A \rightarrow VXV$

Observaciones:

La función de incidencia δ le hace corresponder a cada arista un PAR ORDENADO de vértices, al primero se lo llama EXTREMO INICIAL de la arista, y el segundo es el VERTICE FINAL.

Los caminos y los ciclos se definen de la misma forma que para los grafos no dirigidos, pero hay que respetar el sentido de las aristas.

VER EJEMPLO

SALIR

DEFINICION de ARBOL


Un ARBOL es un grafo conexo y sin ciclos.

Condición necesaria y suficiente:

Un árbol es un grafo en el cual entre todo par de vértices existe un único camino simple.

Propiedades básicas de los árboles:

- Al agregar una arista entre dos vértices de un árbol, deja de ser árbol.
- Todas las aristas de un árbol son puentes.
- En todo árbol se cumple que: $|V| = |A| + 1$

BOSQUE: es un grafo no conexo en el cual cada una de las componentes es un árbol.

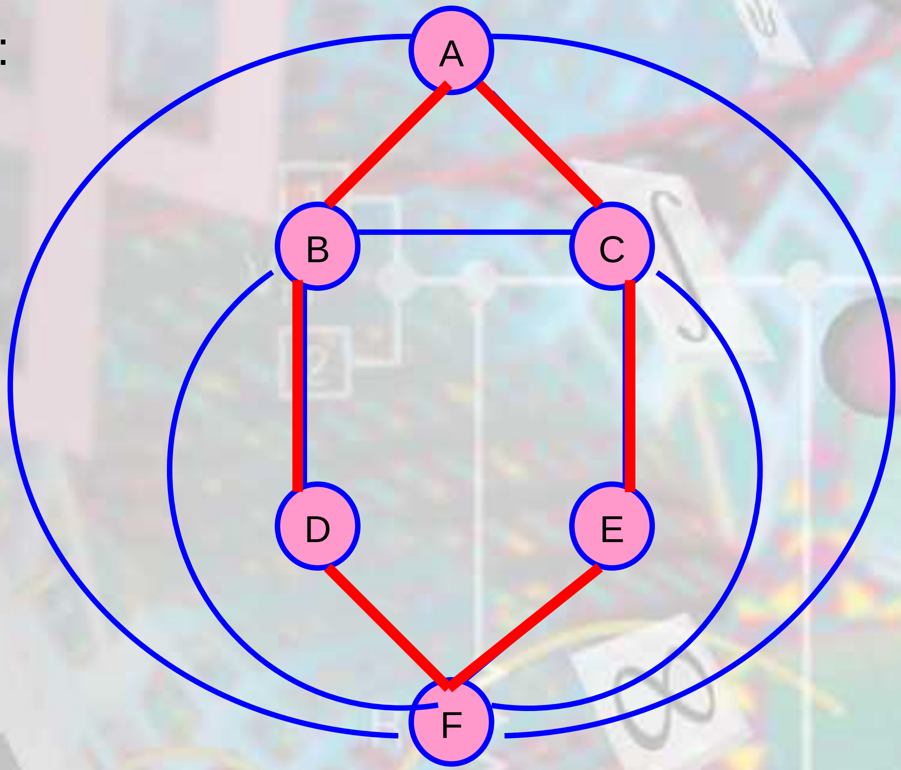
Propiedad: En un bosque de k componentes: $|V| = |A| + k$

VER EJEMPLO

SALIR

CAMINOS Y CICLOS HAMILTONIANOS

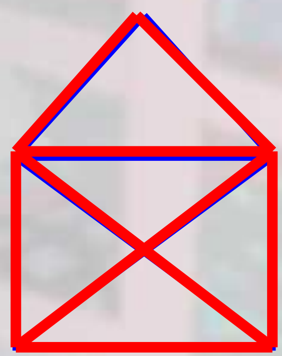
EJEMPLO:



Un posible ciclo hamiltoniano es: (A, B, D, F, E, C, A)

SALIR

CAMINOS Y CICLOS EULERIANOS



Este grafo no tiene ciclo euleriano pues hay dos vértices de grado 3. Tiene solo camino euleriano.

Este grafo tiene ciclo euleriano pues todos sus vértices tienen grado par.

SALIR

GRAFOS BIPARTITOS

Sea un grafo simple $G = (V, A, \varphi)$ con $V = \{ v_1, ..., v_n \}$ y $A = \{ a_1, ..., a_m \}$

G es BIPARTITO $\Leftrightarrow V = V_1 \cup V_2$ con $V_1 \neq \varnothing \wedge V_2 \neq \varnothing \wedge V_1 \cap V_2 = \varnothing$

$\wedge \; \forall a_i \in A : \varphi(a_i) = \{ v_j , v_k \}$ con $v_j \in V_1 \wedge v_k \in V_2$

O sea, los grafos BIPARTITOS son grafos cuyo conjunto de vértices está particionado en dos subconjuntos: V_1 y V_2 tales que los vértices de V_1 pueden ser adyacentes a los vértices de V_2 pero los de un mismo subconjunto no son adyacentes entre sí.

VER EJEMPLO

VER GRAFOS Kn,m

SALIR

GRAFOS COMPLETOS Kn

Sea $n \in N$: $K_n = (V, A, \varphi)$ tal que:
$\forall\ v, w \in V$: $v \neq w \Leftrightarrow \exists\ a \in A : \varphi (a) = \{ v, w \}$
O sea, los K_n son grafos simples de n vértices en los cuales cada vértice es adyacente a todos los demás.

EJEMPLOS:

K_3

K_4

K_5

EJERCICIO: En una fiesta hay 8 personas que en un determinado momento llenan sus copas de sidra y brindan entre ellos, todos con todos.

¿Cuántos choques de copas hay en total?

VER SOLUCION

SALIR

Solución:

Podemos considerar en K_8, donde los vértices son las personas y las aristas representan los choques de copas, ya que cada persona choca su copa con todos los demás excepto con sí mismo.

Utilizando la propiedad: $\Sigma\, g(v_i) = 2\,|A|$

Como todos los vértices tienen grado 7, nos queda:

$$8 \bullet 7 = 2 \bullet |A| \qquad \Rightarrow \quad |A| = 28$$

En total hay 28 choques de copas.

Para pensar:

1)¿Los Kn son grafos k-regulares? ¿Con qué valor de k?

2)¿Qué particularidad tienen las matrices de adyacencia de los grafos K_n?

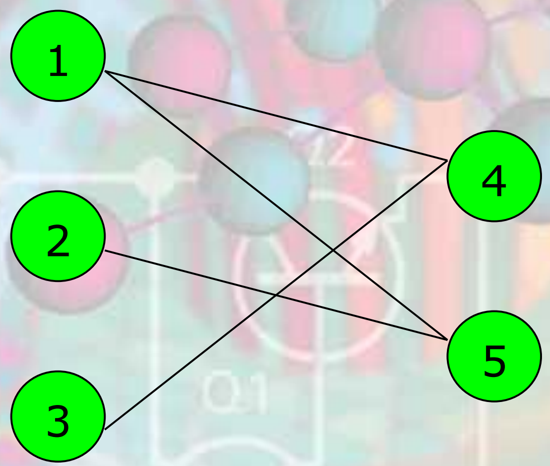
SALIR

EJEMPLO:

En el siguiente grafo, cuyo conjunto de vértices es: $V = \{ 1, 2, 3, 4, 5 \}$

Si consideramos los subconjuntos:

$V_1 = \{ 1, 2, 3 \}$ $V_2 = \{ 4, 5 \}$



Vemos que todas las aristas que hay, tienen un extremo en V_1 y el otro en V_2. Por lo tanto es BIPARTITO.

Nota: la definición no exige que deba haber arista entre todo par de vértices (uno de V_1 y el otro de V_2) sino que dice que las aristas que existan deben estar comprendidas entre un vértice de cada subconjunto. En este ejemplo, no hay arista entre 2 y 4, la cual estaba permitida.

GRAFOS CONEXOS

RELACION DE CONEXIÓN:

Dado un grafo G = (V, A, φ), en el conjunto V se define la siguiente relación:

$$v_i \ R \ v_j \Leftrightarrow \exists \text{ camino de } v_i \text{ a } v_j \ \vee \ v_i = v_j$$

Esta relación es de equivalencia y por lo tanto pueden hallarse las clases de equivalencia, a las que se denomina COMPONENTES CONEXAS.

GRAFO CONEXO:

Un grafo es conexo si y sólo si tienen una única componente conexa.

Un grafo es conexo si y sólo si existe algún camino entre todo par de vértices.

GRAFOS BIPARTITOS COMPLETOS $K_{n,m}$

Son grafos bipartitos de n+m vértices con TODAS las aristas posibles.

EJEMPLOS:

$K_{3,2}$

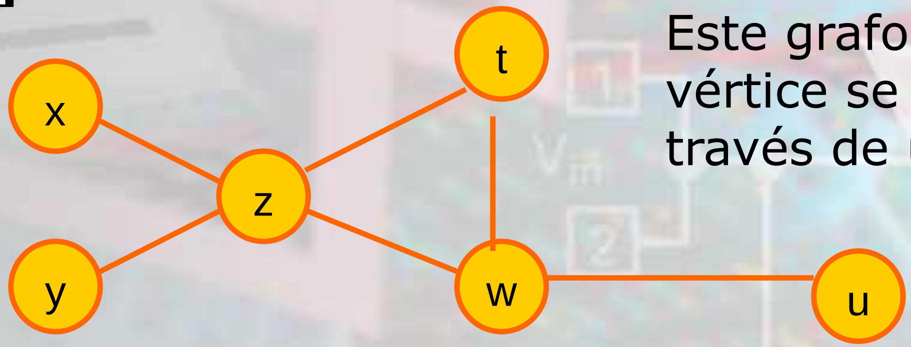
$K_{3,3}$

La cantidad de aristas de un grafo $K_{n,m}$ es $n \bullet m$

SALIR

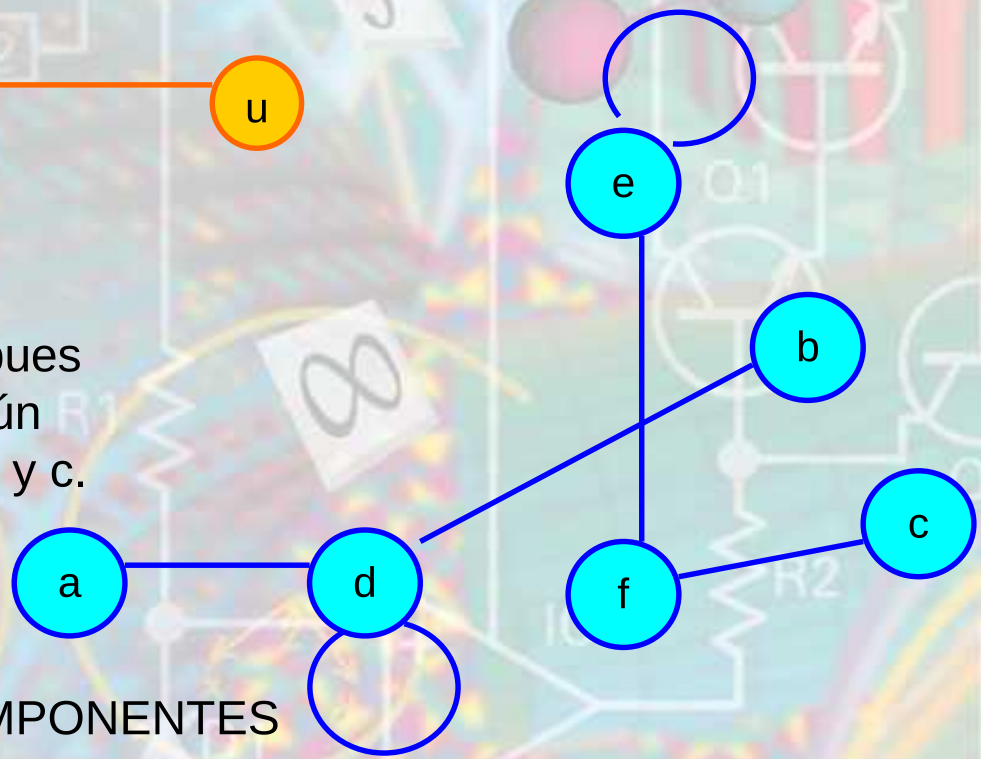
GRAFOS CONEXOS

EJEMPLOS:



Este grafo es conexo ya que de cualquier vértice se puede llegar a cualquier otro a través de un camino.

Este grafo NO es conexo pues por ejemplo no existe ningún camino entre los vértices a y c.



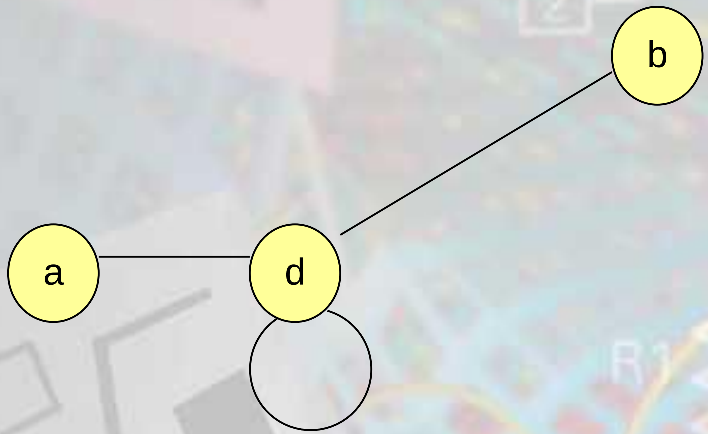
VER COMPONENTES

SALIR

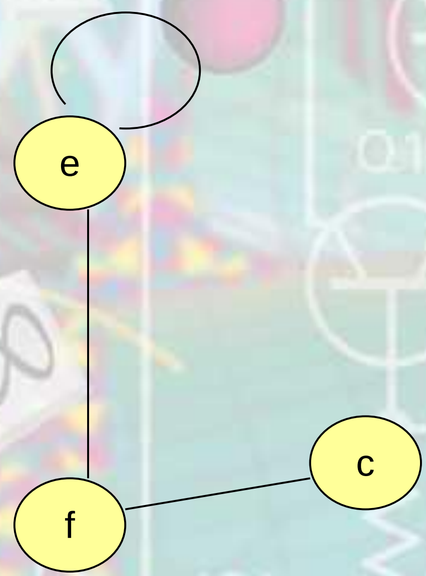
GRAFOS CONEXOS

Sin embargo, está formado por dos subgrafos que cada uno de ellos sí es conexo, se llaman COMPONENTES CONEXAS:

Una componente conexa:



La otra componente conexa:



SALIR

CONDICIONES NECESARIAS PARA QUE DOS GRAFOS SEAN ISOMORFOS:

Deben tener la misma cantidad de vértices.

Deben tener la misma cantidad de aristas.

Deben tener los mismos grados de los vértices.

Deben tener caminos de las mismas longitudes.

Si uno tiene ciclos, el otro también debe tenerlos.

Etc.

Observación: las condiciones mencionadas son necesarias (es decir que sí o sí se deben cumplir para que los grafos san isomorfos) pero no son suficientes (o sea que aunque se cumplan puede ser que los grafos no sean isomorfos)
Para estar seguros que dos grafos son isomorfos,
una condición que es suficiente es que tengan la misma matriz de adyacencia.

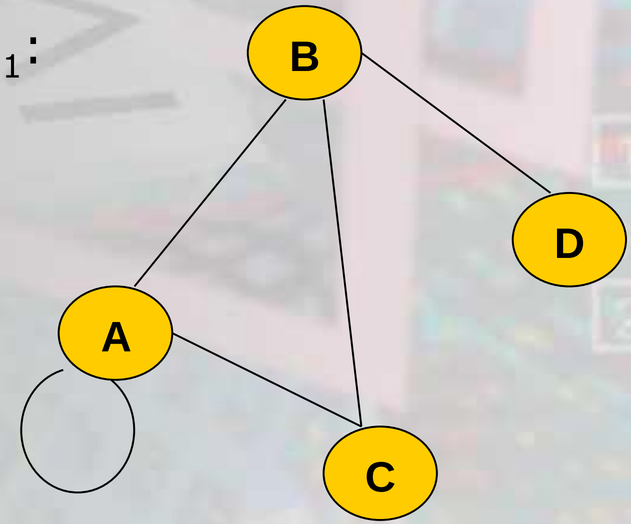
VER EJEMPLO

SALIR

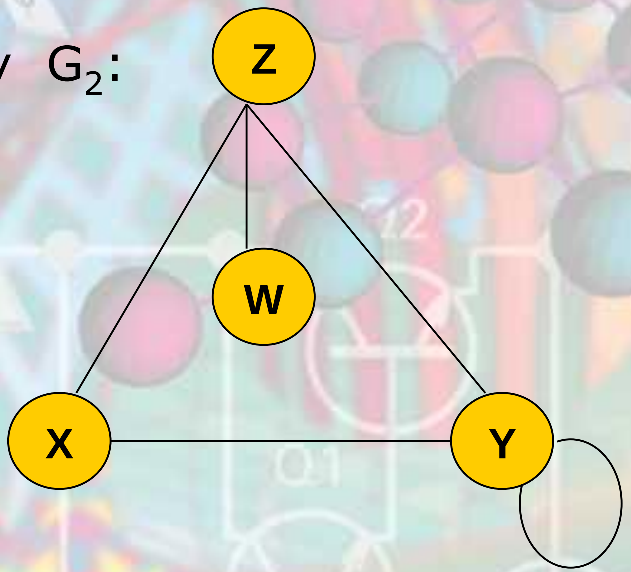
EJEMPLO:

Analicemos si los siguientes grafos son isomorfos:

G_1:



y G_2:



Solución:

Ambos tienen 4 vértices y 5 aristas.

Definamos la función biyectiva, haciendo corresponder los vértices con iguales grados:

$$f(A) = Y \ ; \ \ f(B) = Z \ ; \ f(C) = X \ ; \ f(D) = W$$

SALIR

En la definición decía que si entre dos vértices del primer grafo había una arista, también debía haber arista entre los vértices correspondientes en el segundo grafo.
Por ejemplo entre A y B hay una arista en G_1, y también hay una arista entre f(A) y f(B) en G_2.
Esto mismo habría que revisar para cada arista, ello se puede hacer todo junto con la matriz ORDENANDO CONVENIENTEMENTE los vértices:

	A	B	C	D
A	1	1	1	0
B	1	0	1	1
C	1	1	0	0
D	0	1	0	0

	Y	Z	X	W
Y	1	1	1	0
Z	1	0	1	1
X	1	1	0	0
W	0	1	0	0

Como las matrices son iguales podemos asegurar que G_1 es isomorfo a G_2.

DESCONEXION DE GRAFOS

Ver subgrafos ~Gv

Dado un grafo G = (V, A, φ) conexo

ISTMO O PUNTO DE CORTE

v $\in$ V es istmo $\Leftrightarrow$ ~Gv es no conexo

O sea, un istmo es un vértice tal que al suprimirlo desconecta al grafo

PUENTE

a $\in$ A es puente $\Leftrightarrow$ ~Ga es no conexo

O sea, un puente es una arista tal que al suprimirla desconecta al grafo

CONJUNTO DESCONECTANTE

B $\subseteq$ A es desconectante $\Leftrightarrow$ ~GB es no conexo

O sea, un conjunto de aristas es deconectante si al suprimirlo desconecta

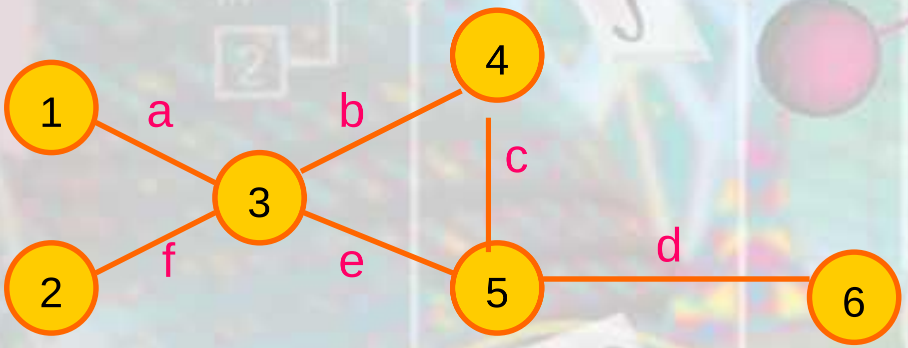
SALIR

CONJUNTO
DE CORTE

$B \subseteq A$ es de corte $\Leftrightarrow$ B es desconectante y además $\forall\, C \subset B$, C no es desconectante

O sea, un conjunto de aristas es de corte si al suprimirlo desconecta al grafo, pero ningún subconjunto propio debe hacerlo, es decir, el conjunto de corte está formado únicamente por las aristas necesarias para desconectar y no por otras.

EJEMPLO:



ISTMOS: vértice 3 y vértice 5.

PUENTES: arista d, arista a y arista b.

CONJUNTOS DESCONECTANTES: $B_1 = \{ b, e \}$, $B_2 = \{ a, f, e \}$, etc.

De los dos conjuntos anteriores B_1 es DE CORTE

SALIR

SUB-GRAFOS

Dado un grafo $G = (V, A, \varphi)$, se denomina subgrafo al grafo $G' = (V', A', \varphi/A')$ tal que $V' \subseteq V \quad \wedge \quad A' \subseteq A \quad \wedge \quad \varphi/A'$ es la función φ restringida a A'.

Para obtener subgrafos de un grafo dado se puede:

- suprimir uno o varios vértices y las aristas incidentes en ellos
- suprimir solamente una o varias aristas.

Si se suprime un vértice v, el subgrafo restante es ~Gv

Si se suprime un vértice a, el subgrafo restante es ~Ga

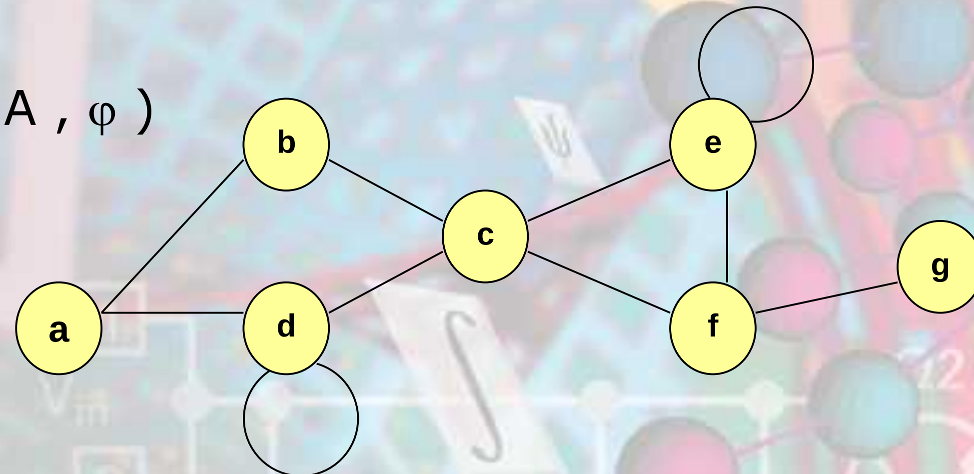
También se puede obtener un subgrafo generado por un conjunto de vértices.

VER EJEMPLOS

SALIR

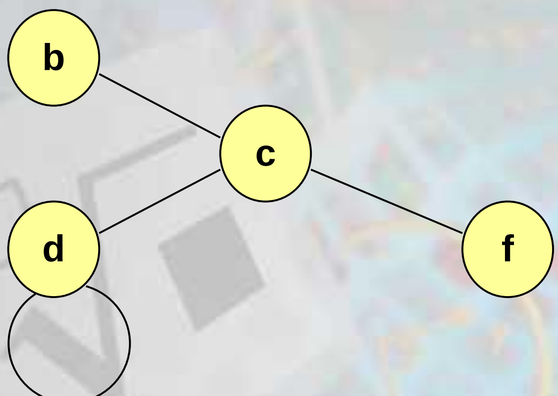
EJEMPLO:

Dado el grafo: $G = (V, A, \varphi)$

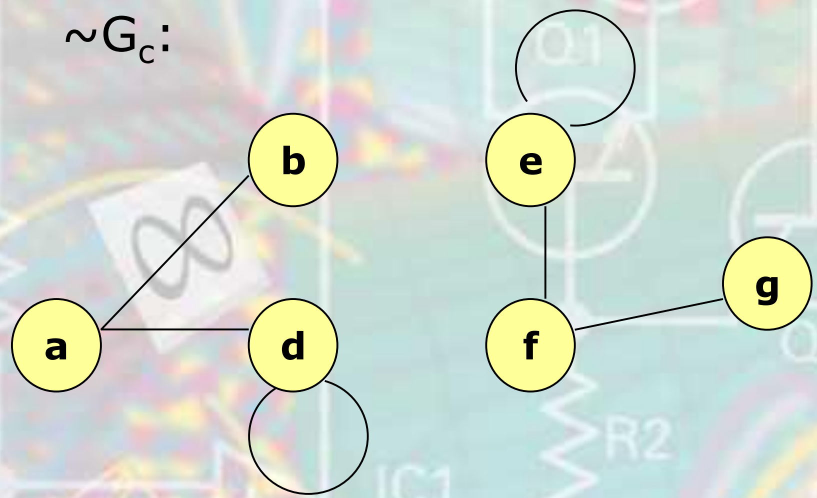


Algunos subgrafos son:

$\sim G_{a,e,g}$:



$\sim G_{c}$:



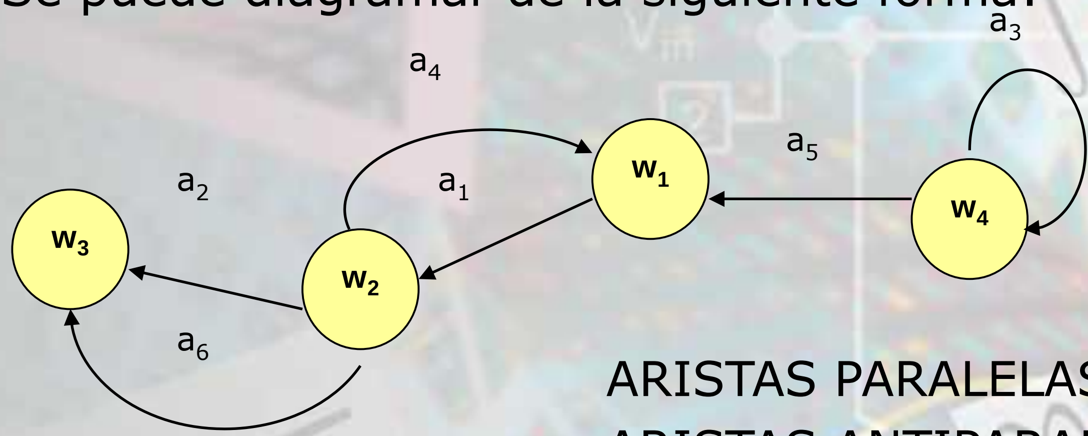
EJEMPLO:

$V = \{ w_1, w_2, w_3 , w_4 \}$ $A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6 \}$

$\delta(a_1)=(w_1,w_2)$ $\delta(a_2)=(w_2,w_3)$ $\delta(a_3)=(w_4,w_4)$

$\delta(a_4)=(w_2,w_1)$ $\delta(a_5)=(w_4,w_1)$ $\delta(a_6)= (w_2,w_3)$

Se puede diagramar de la siguiente forma:



Extremo inicial de a_5: w_4

Extremo final de a_5: w_1

BUCLE: a_3

ARISTAS PARALELAS: a_2 y a_6

ARISTAS ANTIPARALELAS: a_1 y a_4

CAMINO: $C = (w_4, a_5, w_1, a_1, w_2, a_2, w_3)$

Camino simple: si todos los vértices son distintos.
Camino elemental: si todas las aristas son distintas.

SALIR

FUNCION GRADO EN UN DIGRAFO

GRADO POSITIVO → cantidad de arcos que "entran" al vértice. Se denota $g^+(v)$

GRADO NEGATIVO → cantidad de arcos que "salen" del vértice. Se denota $g^-(v)$

GRADO TOTAL → suma de los grados positivo y negativo. Se denota $g(v)$

GRADO NETO → Diferencia entre grado positivo y negativo. Se denota $g_N(v)$

Propiedades:

$\Sigma\, g^+(v_i) = |A|$; $\Sigma\, g^-(v_i) = |A|$

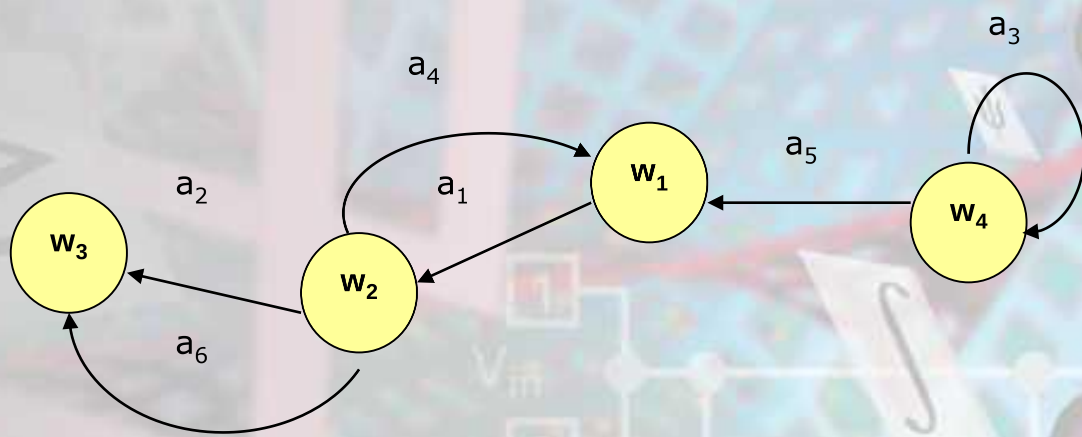
$\Sigma\, g(v_i) = 2\,|A|$; $\Sigma\, g_N(v_i) = 0$

VER EJEMPLO

¿Qué es un POZO
y una FUENTE?

SALIR

EJEMPLO:



Grados positivos:

$g^+(w_1) = 2$; $g^+(w_2) = 1$; $g^+(w_3) = 2$; $g^+(w_4) = 1$

Grados negativos:

$g^-(w_1) = 1$; $g^-(w_2) = 3$; $g^-(w_3) = 0$; $g^-(w_4) = 2$

Grados totales:

$g(w_1) = 3$; $g(w_2) = 4$; $g(w_3) = 2$; $g(w_4) = 3$

Grados netos:

$g_N(w_1) = 1$; $g_N(w_2) = -2$; $g_N(w_3) = 2$; $g_N(w_4) = -1$

SALIR

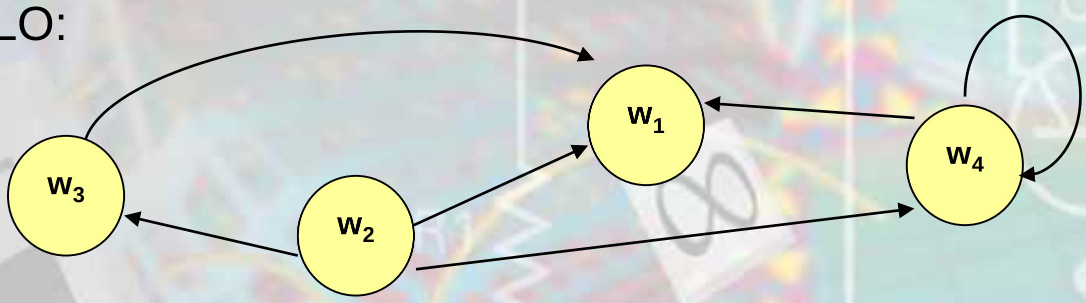
POZO es un vértice v tal que $g^{-}(v) = 0$

O sea, v no es extremo inicial de ninguna arista.

FUENTE es un vértice v tal que $g^{+}(v) = 0$

O sea, v no es extremo final de ninguna arista.

EJEMPLO:



w_1 es POZO, y w_2 es FUENTE.

SALIR

REPRESENTACION MATRICIAL DE DIGRAFOS:

Sea un digrafo simple $G = (V, A, \delta)$
con $V = \{ v_1, v_2, \ldots, v_n \}$ y $A = \{ a_1, a_2, \ldots, a_m \}$

MATRIZ DE ADYACENCIA → MATRIZ BOOLEANA de n x n

Ma(G) cuyos elementos m_{ij}

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists a \in A : \delta(a) = (v_i, v_j) \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

MATRIZ DE INCIDENCIA → MATRIZ BOOLEANA de n x m

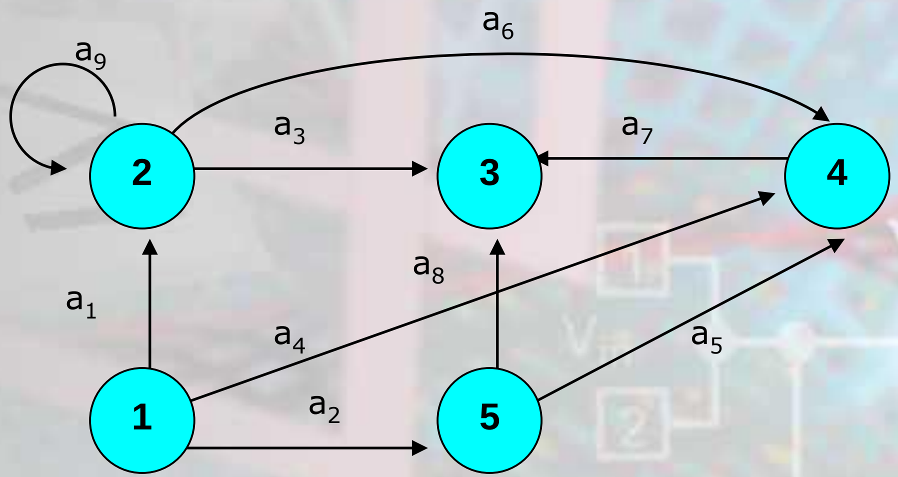
Mi(G) cuyos elementos m_{ij}

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es vértice inicial de } a_j \\ -1 & \text{si } v_i \text{ es vértice final de } a_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es extremo de } a_j \end{cases}$$

VER EJEMPLO

SALIR

EJEMPLO:



$$Ma(G) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Mi(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

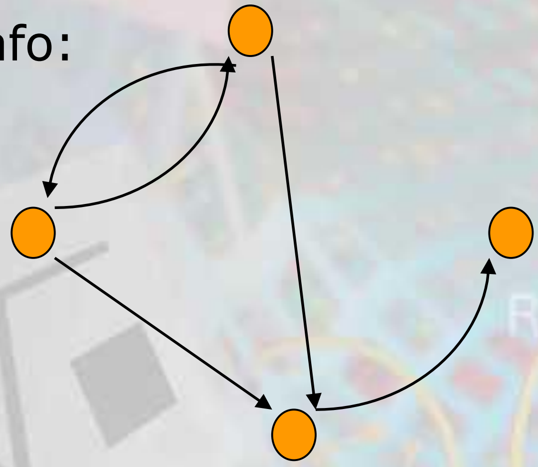
SALIR

GRAFO ASOCIADO A UN DIGRAFO

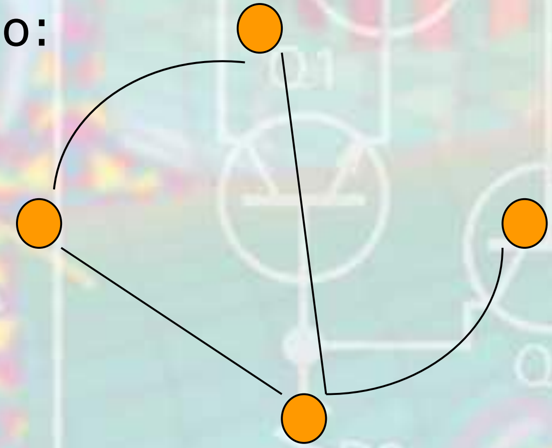
Dado un digrafo, si se cambian las aristas dirigidas por aristas no dirigidas, se obtiene el grafo asociado. Es decir hay que ignorar el sentido de las aristas. Si en el digrafo original hay aristas paralelas o antiparalelas, en el grafo asociado sólo se representa una de ellas.

EJEMPLO:

Digrafo:



Grafo asociado:



SALIR

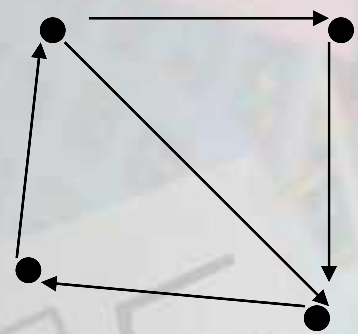
CONEXIDAD EN DIGRAFOS

Ver GRAFO ASOCIADO

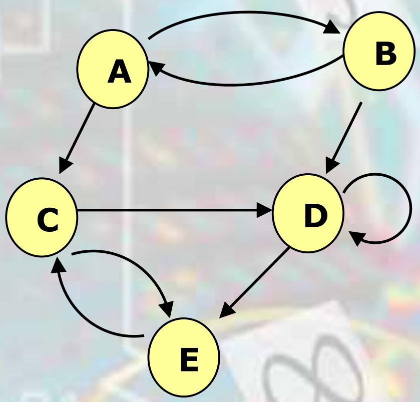
DÍGRAFO CONEXO: es todo aquel cuyo grafo asociado sea conexo.

DÍGRAFO FUERTEMENTE CONEXO: es todo aquel en el que exista algún camino entre todo par de vértices.

EJEMPLOS:

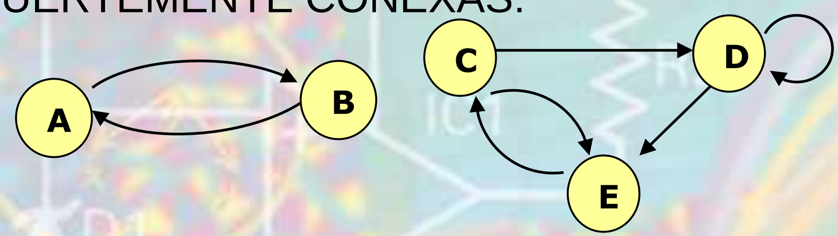


Este dígrafo es conexo y además es fuertemente conexo.



Este digrafo si bien es conexo, NO es FUERTE-MENTE CONEXO, ya que por ejemplo no existe camino alguno que salga del vértice C y llegue al vértice B.

Lo que sí hay son dos COMPONENTES FUERTEMENTE CONEXAS:



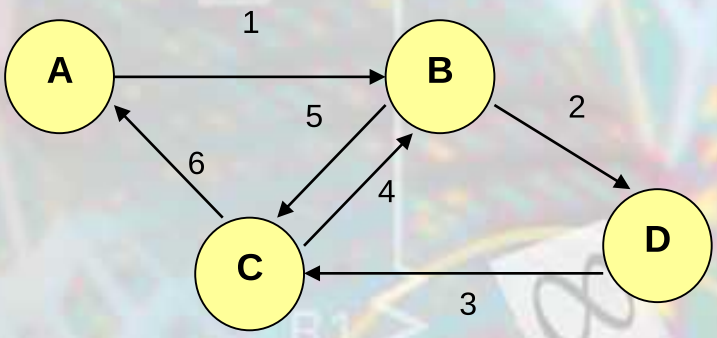
SALIR

CAMINOS DE EULER Y HAMILTON EN DIGRAFOS

Se definen de forma similar que para grafos no dirigidos, pero hay que respetar el sentido de las aristas.

Condición necesaria y suficiente para que exista ciclo de Euler en un digrafo:
$\forall\, v \in V : g+(v) = g-(v)$

EJEMPLO:



En este digrafo existe ciclo de Euler: C = (A,1,B,2,D,3,C,4,B,5,C,6,A)

y un posible ciclo de Hamilton: C = (A,1,B,2,D,3,C,6,A)

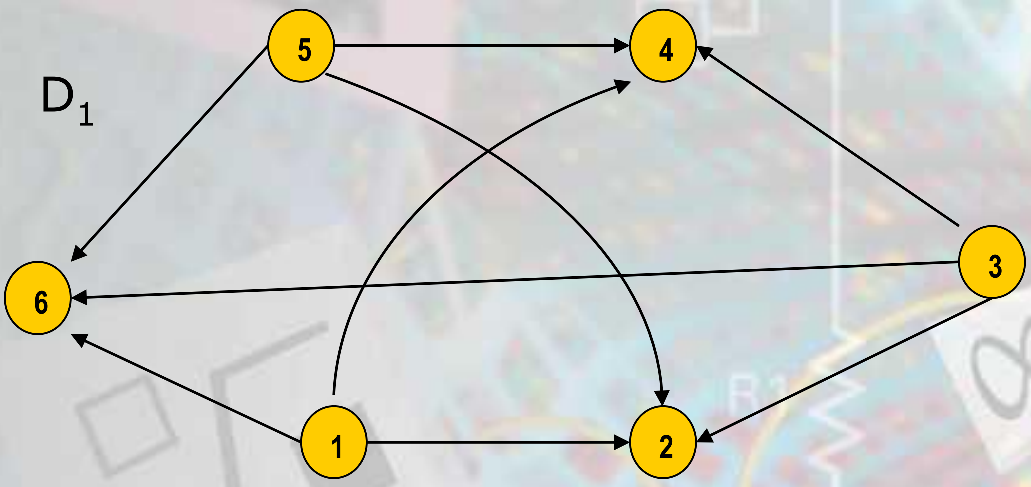
SALIR

ISOMORFISMOS DE DIGRAFOS

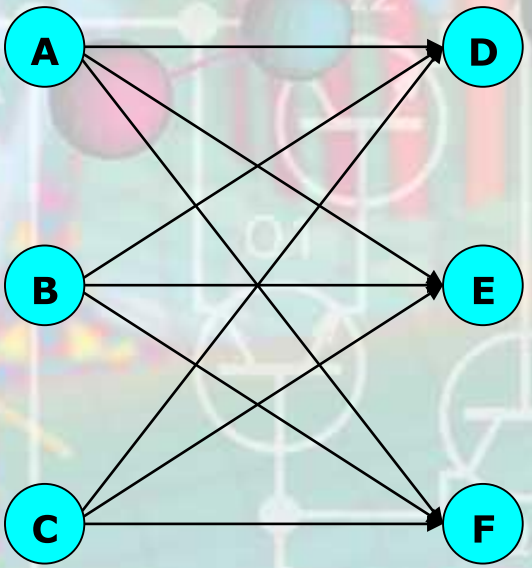
Es lo mismo que para grafos, pero hay que tener en cuenta el sentido de las aristas.

EJEMPLO:

D_1



D_2



Estos dos digrafos son isomorfos?

VER SOLUCION

SALIR

SOLUCION:

Si definimos la función: $f : V_1 \rightarrow V_2$ tal que $f(1) = A$; $f(2) = D$; $f(3) = B$; $f(4) = E$; $f(5) = C$; $f(6) = F$

y construimos las matrices de adyacencia:

Matriz de D_1

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	0	1	0	1
2	0	0	0	0	0	0
3	0	1	0	1	0	1
4	0	0	0	0	0	0
5	0	1	0	1	0	1
6	0	0	0	0	0	0

Matriz de D_2

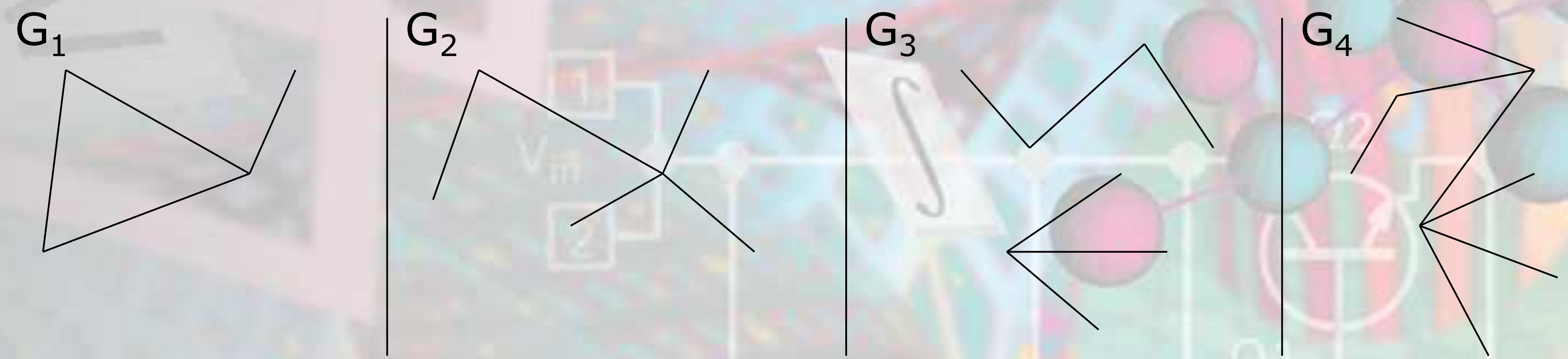
	A	D	B	E	C	F
A	0	1	0	1	0	1
D	0	0	0	0	0	0
B	0	1	0	1	0	1
E	0	0	0	0	0	0
C	0	1	0	1	0	1
F	0	0	0	0	0	0

Como las matrices son iguales, entonces los dígrafos son isomorfos.

SALIR

EJEMPLOS:

¿Cuáles de los siguientes grafos son árboles?



SOLUCION:

G_1 no es árbol pues tiene un ciclo de longitud 3.

G_3 no es árbol pues no es conexo.

G_2 y G_4 sí son árboles.

SALIR

ARBOLES DIRIGIDOS

Un digrafo simple es un árbol dirigido si su grafo asociado es un árbol. De los árboles dirigidos nos interesa estudiar los árboles con raíz.

ARBOL DIRIGIDO CON RAIZ

Es un árbol dirigido en el cual el grado entrante (positivo) de cada vértice es igual a 1, salvo un único vértice con grado positivo igual a cero, llamado raíz.

EJEMPLOS:

Indica cuales de los siguientes árboles dirigidos tienen raíz:

ELEMENTOS DE UN ARBOL

Un vértice v de un árbol se dice que es HOJA cuando g(v) = 1

Los VERTICES INTERNOS son todos aquellos que no son la raíz ni las hojas

Se llama RAMA a todo camino que va desde la raíz a alguna hoja.

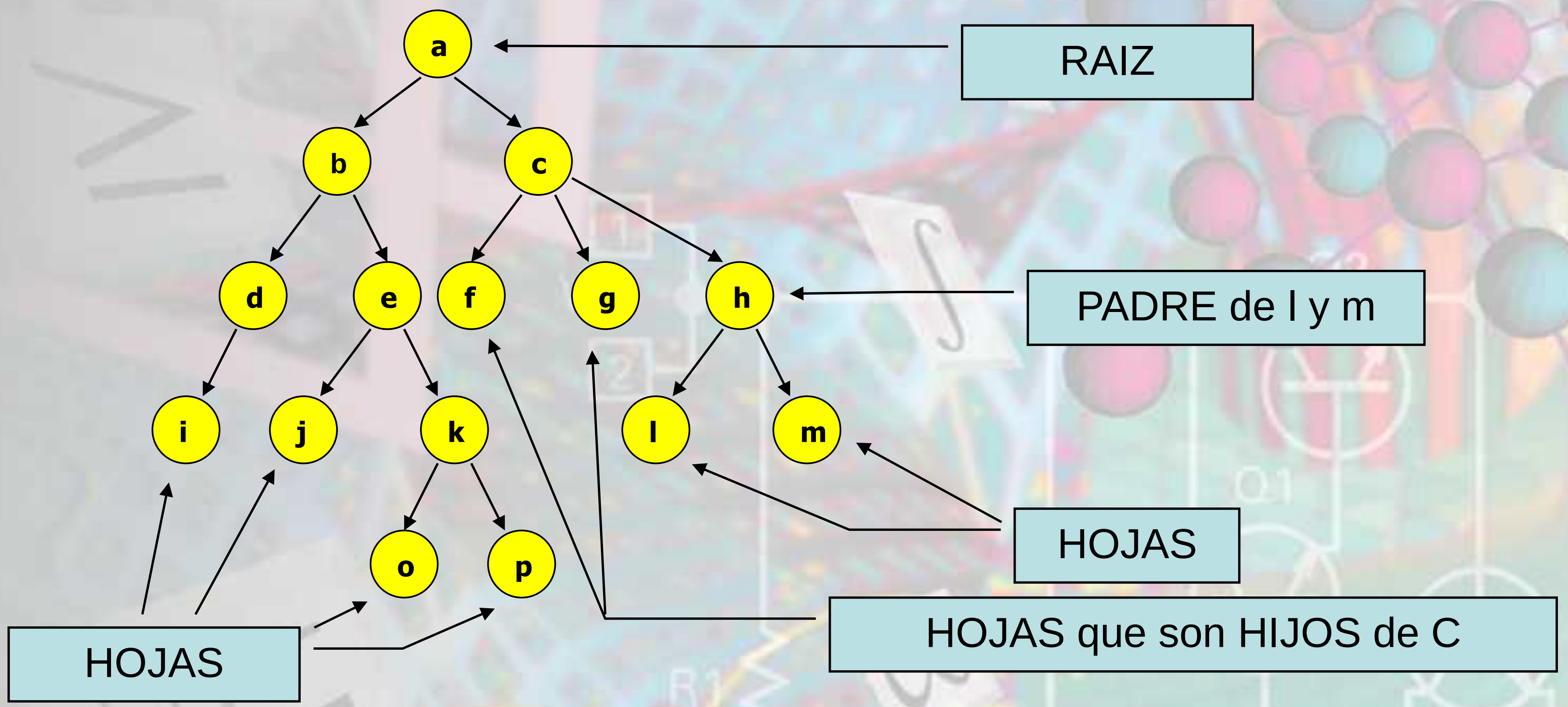
OTRAS DEFINICIONES

v es antecesor de w $\Leftrightarrow$ existe un único camino simple de v a w.
w es sucesor de v en el caso anterior
v es padre de w $\Leftrightarrow$ existe una arista de v a w.
w es hijo de v en el caso anterior.
v y w son hermanos si tienen el mismo padre.

VER EJEMPLO

SALIR

EJEMPLO:



SALIR

NIVEL DE UN VERTICE

El nivel de la raíz es cero: $n(r) = 0$
Cada vértice tiene un nivel más que su padre:
si p es padre de v $\rightarrow n(v) = n(p) + 1$

ALTURA DE UN ARBOL

Es el mayor NIVEL alcanzado por las HOJAS.

ARBOL BALANCEADO

Si todas las hojas están en el nivel h o h-1

ARBOL n-ario

Un árbol con raíz es n-ario $\Leftrightarrow \forall\, v \in V : g\text{-}(v) \leq n$
Es decir, cada vértice puede tener a lo sumo n hijos.

ARBOL n-ario REGULAR

Si todos los vértices tienen la misma cantidad de hijos, salvo las hojas que no tienen hijos.

ARBOL n-ario REGULAR PLENO o COMPLETO

Si además de ser n-ario regular, todas las hojas se hallan en el mismo nivel.

Si n=2 entonces se dice árbol BINARIO.
Si n=3 entonces se dice árbol TERNARIO.

SALIR

RECORRIDOS DE ARBOL

¿Qué significa RECORRER UN ARBOL?
Significa nombrar todos los vértices del árbol siguiendo un determinado orden.

Las siguientes son las definiciones recursivas de los recorridos de árboles:

ORDEN PREVIO O PRE-ORDEN

1. Nombra la raiz
2. Recorre el subarbol izquierdo en este mismo orden
3. Recorre los subarboles derechos en este mismo orden

ORDEN SIMETRICO O IN-ORDEN

1. Recorre el subarbol izquierdo en este mismo orden
2. Nombra la raiz
3. Recorre los subarboles derechos en este mismo orden

ORDEN POSTERIOR O POST-ORDEN

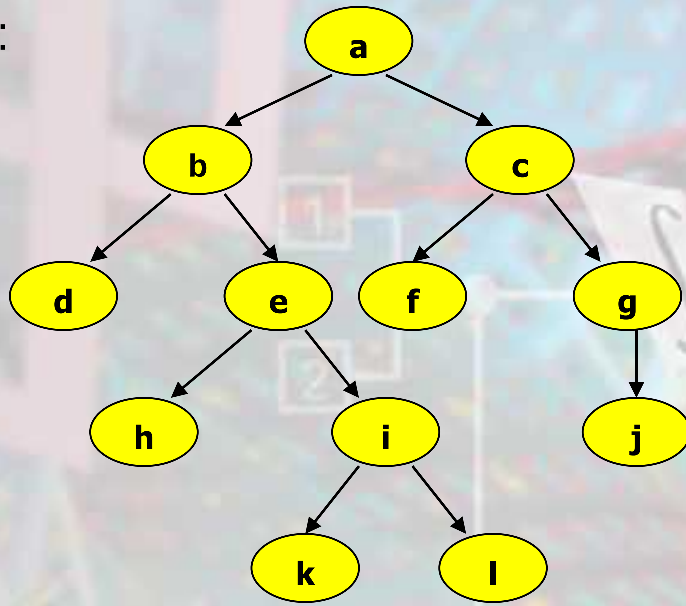
1. Recorre el subarbol izquierdo en este mismo orden
2. Recorre los subarboles derechos en este mismo orden
3. Nombra la raiz

VER EJEMPLO

SALIR

RECORRIDOS DE ARBOL

EJEMPLO:



Recorrido en orden previo: **a b d e h i k l c f g j**

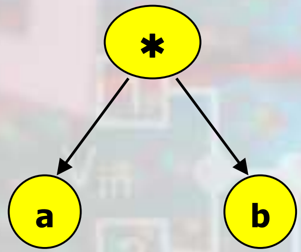
Recorrido en orden simétrico: **d b h e k i l a f c j g**

Recorrido en orden posterior: **d h k l i e b f j g c a**

SALIR

REPRESENTACION DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS

¿Cómo se representan expresiones algebraicas mediante árboles?
Si **∗** es una operación binaria, el resultado de operar a con b se representa de la siguiente forma:



El operador es la raíz y los operandos son los hijos o subárboles.
Si leemos este árbol en orden simétrico, obtenemos la expresión usual: a **∗** b

Cuando representamos expresiones algebraicas, son comunes los siguientes nombres:

Notación Polaca: es el orden PREVIO

Notación usual o infija: es el orden SIMETRICO

Notación polaca inversa: es el orden POSTERIOR

VER EJEMPLO

SALIR

¿Para qué se usa la notación polaca inversa?

Por ejemplo, algunas calculadoras, utilizan notación polaca inversa para resolver las operaciones. Disponen de un stack o pila, en la que van almacenando los operandos, y a medida que se ingresa un operador, calculan el resultado de los dos últimos elementos de la pila, dejando el resultado en su lugar.

¿Sabes qué es una pila?

Una pila es una lista de elementos, en la cual se van agregando nuevos elementos por un extremo y se sacan por el mismo extremo. Se las llama LIFO (Last In First Out)

¿Cómo se resuelve una operación?

Por ejemplo, si tienes que resolver $2/[(4+3) \bullet (9-2^3)]$ con una de esas calculadoras, lo debes hacer en notación polaca inversa, o sea orden posterior.

VER OPERACION

SALIR

Lo leemos en notación polaca inversa: 2 4 3 + 9 2 3 ↑ - • /

1) Al ingresar el 2, como es un operando lo guarda en la pila:

2) Luego viene el 4 y lo guarda también:

3) Lo mismo ocurre al ingresar el 3:

4) Pero al ingresar el + , como es un operador, extrae los dos últimos elementos de la pila, en este caso, entre el 4 y el 3, los opera y dicho resultado lo coloca en la pila:

5) Al ingresar el 9 lo coloca en la pila, como así también al 2 y al 3:

6) Cuando ingresamos el ↑ , extrae los dos últimos elementos de la pila, en este caso el 2 y el 3, realiza la operación (2 al cubo) y la coloca en la pila:

7) Con el - hace lo mismo, toma el 9 y el 8, los resta y el resultado lo pone en la pila:

8) Al ingresar el signo • , opera los dos últimos que hay ahora, el 7 y el 1, el resultado lo coloca en la pila:

9) Por último, con el signo / hace lo mismo, operando el 2 y el 7, y quedando el resultado final en la base de la pila:

3
8 2
1 9
7 4
0.2857

SALIR